
INSTRUMENTATION DU CALCUL FORMEL ET GEOMETRIE DYNAMIQUE

Du jeu de cadres au jeu de paradigmes Illustration pratique avec les tangentes communes à deux paraboles

Yves MARTIN
Irem de La Réunion

1. — Le contexte

Dans le cadre de la préparation à l'oral du CAPES de mathématiques, une UE « Logiciels de calculs scientifiques » du master MEEF de l'ESPE de La Réunion permet de faire un (rapide) tour d'horizon des logiciels disponibles aux épreuves orales. Si on y travaille des situations de collège et lycée utilisables pour les leçons d'oral, pour l'évaluation, on se permet d'aller un peu plus loin, autour de projets, afin de susciter une réflexion sur l'usage de ces logiciels, en particulier, pour ce qui va nous intéresser ici, sur nos interprétations des réponses du calcul formel dans le cadre de constructions en géométrie dynamique.

Avec l'exemple d'un de ces projets, dans un premier temps, nous allons voir en quoi l'usage du calcul formel est un moyen de produire un changement de cadre de l'engagement direct en géométrie dynamique, rendant celui-ci différent, souvent plus important ou plus original que celui réalisé par nos procédures standards rapides.

Dans un second temps, nous proposerons une analyse de la richesse du milieu numérique dans lequel les futurs enseignants évoluent, en mettant en évidence les ruptures et superpositions de paradigmes antagonistes qui sont en jeu dans ces activités numériques.

Par engagement direct on entend tout d'abord ce que Jocelyne Nanard définissait dans sa thèse d'état de 1990, à savoir une conformité d'usage de la manipulation directe vis à vis des objets implémentés, d'une manière générale une interface suffisamment transparente pour que l'utilisateur ressente l'impression d'agir librement sur les représentations des objets. En Géométrie dynamique, Jean Marie Laborde, auteur de Cabri-géomètre, a étendu le concept d'engagement direct à la prise en compte de retours cognitifs du logiciel : le logiciel réagit en comprenant ce que l'utilisateur veut faire. Typiquement créer un point à l'intersection de deux objets en pointant cette intersection est un comportement d'engagement direct

présent dans tous les logiciels, la création à la volée d'un point d'intersection, à l'intérieur d'une création d'objet (cercle, médiatrice) est une autre qualité d'engagement direct, présente seulement dans certains logiciels.

Considération technique

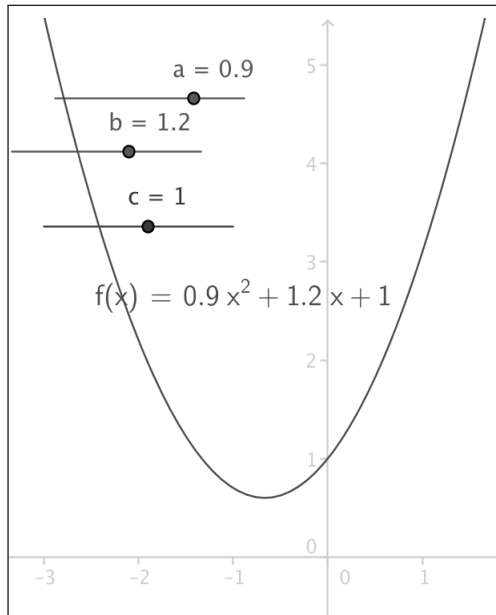
Les constructions géométriques sont faites dans l'un des deux logiciels actuellement proposés au CAPES : GeoGebra et CaRMetal. Toutefois, pour illustrer cet article, on a choisi d'utiliser des figures directement lisibles en ligne, y compris sur tablette - donc hors contexte Java - avec des liens pour manipuler pendant la lecture. Elles sont réalisées avec DGPad. Cette démarche de lecture et manipulation possibles simultanément participe de cette superposition des paradigmes dont nous allons parler plus loin.

2. — Un exemple introductif

Prenons le cas élémentaire de la courbe représentative d'une fonction du second degré. On utilisera le terme générique de *parabole* dans la suite pour en parler, avec implicitement en mémoire que l'on ne parle pas d'une parabole affine quelconque mais d'une parabole dont l'axe (contexte euclidien) a une direction donnée, fixe, parallèle à l'axe des ordonnées dans un repère.

Un exemple de ce qu'on a appelé plus haut « procédures standards rapides » consiste à se donner trois curseurs a , b et c , ci-contre sous GeoGebra, et de construire simplement la représentation de $f(x)=ax^2+bx+c$. Dans un contexte scolaire, c'est particulièrement pertinent pour les raisons que l'on sait : le signe de a , l'ordonnée à l'origine c , mais aussi le fait que la parabole « glisse » le long de l'ordonnée à l'origine en étant égale à elle-même (ce qui n'est

Fig. 1



pas au programme bien entendu) quand on fait varier b .

Une variante à cette construction consiste à se donner trois points du plan A, B, C et à construire la parabole passant par A, B , et C . Pour cela il suffit de résoudre le système linéaire d'inconnues a, b et c :

$$\begin{cases} 2ax(A)^2 + bx(A) + c = y(A) \\ 2ax(B)^2 + bx(B) + c = y(B) \\ 2ax(C)^2 + bx(C) + c = y(C) \end{cases}$$

C'est immédiat avec un logiciel de calcul formel (ici wxMaxima, mais on aurait pu prendre la TI N'spire, xCas ou même, désormais xCas intégré à GGB 5) : voir le résultat en haut de la page suivante...

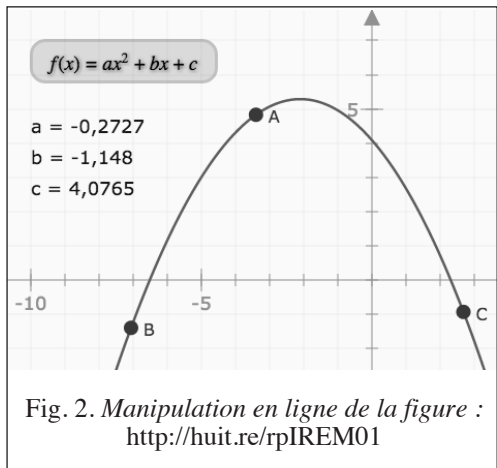
```
(%i1) linsolve([a*x(A)^2+b*x(A)+c=y(A), a*x(B)^2+b*x(B)+c=y(B), a*x(C)^2+b*x(C)+c=y(C)], [a,b,c]);
(%o1) [a=
      x(A)(y(C)-y(B))-x(B)y(C)+y(B)x(C)+y(A)(x(B)-x(C))
      x(A)(x(C)^2-x(B)^2)-x(B)x(C)^2+x(B)^2x(C)+x(A)^2(x(B)-x(C))
      ], b= -
      x(A)^2(y(C)-y(B))-x(B)^2y(C)+y(B)x(C)^2+y(A)(x(B)^2-x(C)^2)
      x(A)(x(C)^2-x(B)^2)-x(B)x(C)^2+x(B)^2x(C)+x(A)^2(x(B)-x(C))
      ], c=
      x(A)(y(B)x(C)^2-x(B)^2y(C))+x(A)^2(x(B)y(C)-y(B)x(C))+y(A)(x(B)^2x(C)-x(B)x(C)^2)
      x(A)(x(C)^2-x(B)^2)-x(B)x(C)^2+x(B)^2x(C)+x(A)^2(x(B)-x(C))
      ]
```

2. 1. Exemple d'utilisation didactique de l'engagement direct sur les paraboles

On obtient les expressions de a , b et c en fonction de A , B et C , que l'on reporte simplement par copier-coller dans le logiciel de géométrie dynamique. On notera que le logiciel de calcul formel sait utiliser les coordonnées des points, dans leurs écritures standard comme paramètre. Les curseurs privilégient une centration sur la fonction, la donnée initiale des points privilégie davantage la courbe représentative : on agit directement sur la parabole, la fonction étant ensuite calculée.

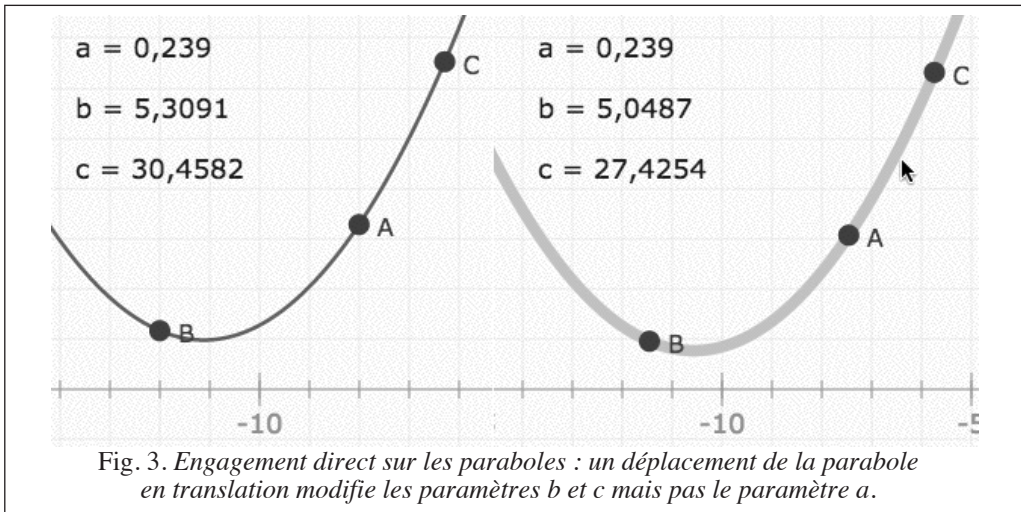
Par ailleurs, on peut voir avec cet exemple de parabole définie par trois points, des qualités d'engagement direct différentes des logiciels. Ainsi dans DGPAD, qui illustre largement cet article, une parabole définie par 3 points peut être déplacée à la souris, c'est même pour cela qu'on a parlé de changement de cadre de l'engagement direct, car cela donne à l'utilisateur une plus grande accessibilité conceptuelle à la parabole : il peut la déplacer, globalement, ce qui n'est pas possible avec une approche par curseurs (voir Fig. 3 en haut de la page suivante).

Au sens de Nanard, l'interface de DGPAD est devenue transparente, plus que celle de GeoGebra où on ne peut pas déplacer en translation une parabole construite par trois points.



Parfois les étudiants reprochent à cette construction de « faire varier les trois paramètres en même temps », mais justement, ce changement de cadre de l'engagement direct doit être accompagné d'un renouvellement des problématiques quant à l'utilisation d'une telle figure en classe. Par exemple, avec une telle figure proposée en classe, on peut demander aux élèves d'explorer cette question : « A et B étant donnés, où doit-on placer le point C pour que le paramètre a soit positif ? ». Belle question pour une exploration dynamique. Voyons cela.

Après quelques essais, les élèves finissent par tracer la droite (AB) - on voit bien que le coefficient a est nul si et seulement si A , B et



C sont alignés, car il n'y a plus de parabole, c'est donc une position frontière. Puis ils trouvent, empiriquement, que C doit être au dessus de la droite (AB) en dehors du segment [AB] et en dessus sinon (Fig. 4 ci-dessous).

Selon la classe, et l'exigence mathématique du programme, on peut se satisfaire de cette exploration, et de son résultat heuristique. Mais si c'est possible — et en tout cas en formation initiale sur les outils numériques du lycée — on peut envisager d'aller un plus loin dans l'exploration mathématique, en proposant une activité

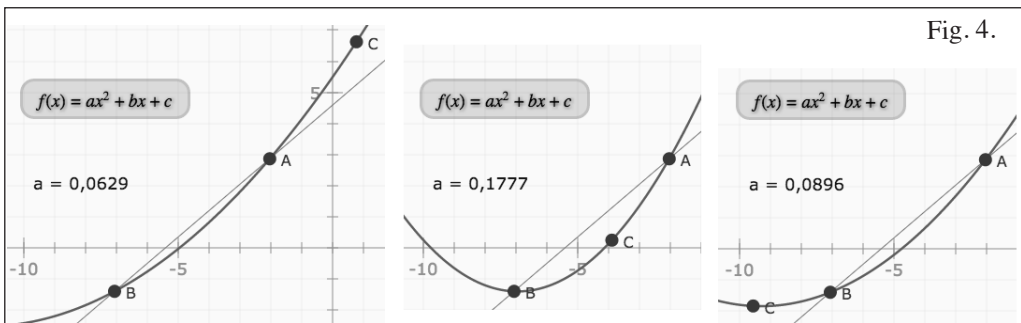
autour d'une preuve de ce résultat. En formation initiale des enseignants ce n'est qu'une suite naturelle de l'activité qui ne pose aucune difficulté.

2. 2. Aspect algébrique formel du résultat obtenu

Pour cela, factorisons le numérateur et le dénominateur du paramètre a . Le dénominateur se factorise simplement par

$$d(a) = (x_A - x_B)(x_C - x_A)(x_C - x_B),$$

en simplifiant les notations, ce qui donne le



signe de $d(a)$ selon la position de C par rapport à A et B . Le numérateur s'écrit

$$n(a) = x_A(y_C - y_B) - x_B(y_C - y_A) + x_C(y_B - y_A),$$

ce qu'on peut mettre aussi sous la forme

$$n(a) = (y_C - y_B)(x_A - x_B) + (y_B - y_A)(x_C - x_B)$$

plus propice à l'utilisation de l'équation de la droite (AB) . En simplifiant par $(x_A - x_B)$, on peut alors écrire

$$a = \frac{y_C - y_B + \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}(x_B - x_C)}{(x_C - x_A)(x_C - x_B)}.$$

L'équation de la droite (AB) étant

$$y = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}(x - x_B) + y_B,$$

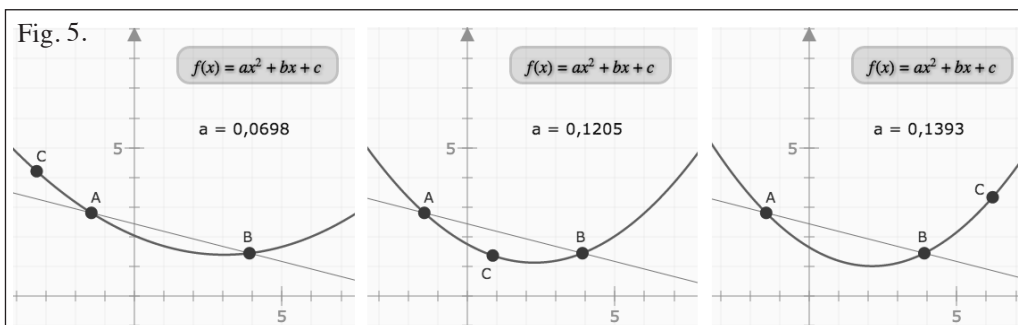
il en résulte que le paramètre a est bien positif si et seulement si C est au dessus de la droite (AB) , en dehors de $[AB]$ et en dessous entre A et B , et ceci, indépendamment du signe de l'expression $(x_A - x_B)$. Ces calculs algébriques valident donc les résultats expérimentaux précédents.

2. 3. De l'ambiguïté du statut des objets dans un contexte dynamique

L'expérience montre que sans effectuer ce retour à des arguments algébriques, de nombreux élèves — mais aussi des étudiants — se conten-

tent de l'observation précédente sans imaginer tester le cas où l'expression $(x_A - x_B)$ est négative (Figure 5 ci-dessous).

En formation initiale, on peut utiliser cette entrée pour aborder l'ambiguïté de la désignation — du côté de l'enseignant — et de la perception — du côté des élèves — du statut des objets mathématiques, en particulier dans un environnement dynamique. C'est l'occasion de traiter cette question, récurrente depuis l'introduction de l'algèbre en collège, mais qui prend une autre dimension avec les concepts fonctionnels du lycée, de la construction d'une culture mathématique partagée autour des différents statuts des objets, souvent implicites et donc sujets à représentation. En effet, si, en mathématique, une expression comme « A et B étant donnés, où placer le point C ... » confère aux points A et B le statut de *paramètres*, et à C le statut de variable, chez beaucoup d'élèves, l'énoncé du problème est perçu comme une consigne où il est explicitement dit de faire bouger le point C et de ne pas toucher à A et B , qui sont « donnés ». Donc C est bien une variable, mais A et B sont *implicitement des constantes*. Il ne vient pas nécessairement à l'idée de déplacer A ou B , et en particulier déplacer un des points jusqu'à faire changer le signe de $(x_A - x_B)$, expression qui intervient si on s'intéresse frontalement au problème posé par une inégalité.



À cette difficulté, assez intrinsèque chez les élèves, peut s'ajouter la pratique culturelle de l'enseignant en géométrie dynamique. En formation initiale, les futurs enseignants entrent très vite dans la logique des figures de géométrie dynamique. Ils manipulent les points de base comme des variables. Pourtant, régulièrement, en situation sur des activités pratiques simples, scolaires, des étudiants peuvent avoir un comportement qui renvoie à une conception de constantes des objets de base de la figure. Il y a un travail approfondi à proposer sur le statut des objets de la géométrie dynamique pour faire évoluer professionnellement les représentations initiales de chacun, travail qui peut être naturellement intégré dans les activités TICE usuelles.

Construire peu à peu cette culture — déjà simplement de l'objet de base, « libre », comme paramètre — peut néanmoins se faire très simplement avec les élèves, en ajoutant des questions comme « Que se passe-t-il si vous inversez les points A et B ? ».

D'une manière générale, cette question du statut d'un objet (paramètre/constante) se retrouve à d'autres niveaux. Par exemple en formation continue, on rencontre également ce problème quand on aborde les scripts de GeoGebra ou de CaRMetal. Le fait d'écrire `Point("A"; 2; -1)` dans un script place le point A à la position (2; -1). Il est important de signaler tout de suite que c'est une initialisation, un paramètre créé et initialisé. Ce n'est pas une constante comme on peut parfois le penser : le point n'est pas figé, il est ensuite déplaçable à la souris.

Ce premier exemple a permis de montrer que l'usage du calcul formel, en dégageant un engagement direct nouveau sur l'objet géométrique construit, permet d'une part des exercices d'une richesse renouvelée, et d'autre

part, peut être l'occasion d'approfondir les notions engagées, autrement que dans un contexte plus standard.

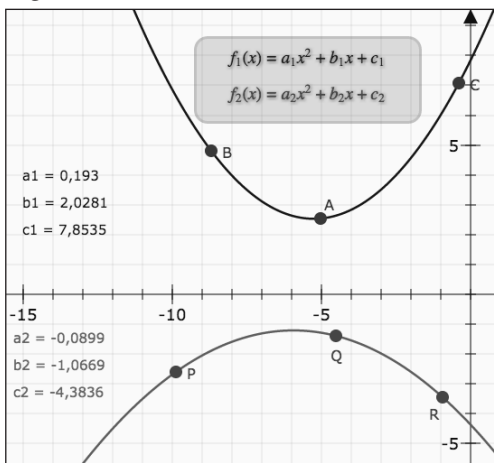
3. — Les tangentes communes à deux paraboles

Nous poursuivons, dans un registre de formation initiale des enseignants, tout en gardant au mot *parabole* le sens qu'il a au début de l'article : toutes les paraboles que nous construirons auront donc des axes parallèles. L'origine de cet article vient de l'attitude empirique d'un étudiant qui n'arrivait pas à construire, dans sa généralité, la solution donnée par wxMaxima, d'un projet qu'il avait à exposer. D'où ce questionnement qui en a suivi lors de la soutenance de ce projet : comment interpréter les résultats formels d'un calcul algébrique quand on doit le transformer en construction ?

Le thème des tangentes communes à deux paraboles est un classique des TP de 1^oS, que l'on retrouve dans différents manuels scolaires, mais proposé de manière statique : les deux paraboles sont des données précises (des constantes donc), et on cherche, pour ces deux paraboles, en général d'orientation différente ($a_1 a_2 < 0$) la possibilité qu'une tangente à l'une soit aussi tangente à l'autre.

Ici le problème est un peu plus général, les deux paraboles (voir la figure 6 ci-contre) sont données chacune par trois points. Les étudiants ayant tous fait en TD, l'exercice précédent de la construction d'une « *parabole passant par trois points* » (avec le vocabulaire adapté donc), on commence par transformer la figure préalable en macro construction pour l'appliquer à trois autres points et avoir ainsi les deux paraboles et le couple de trois triplets de paramètres (a, b, c). On suppose dans toute la suite $a_1 a_2 \neq 0$ pour qu'il y ait bien deux paraboles.

Fig. 6.



confondues. Avec wxMaxima, cela s'écrit par exemple comme ceci :

```
(%i1) f1(x):=a1*x^2+b1*x+c1;
      f2(x):=a2*x^2+b2*x+c2;

(%i3) M:[xM,f1(xM)]; N:[xN,f2(xN)];

(%i5) define(g1(x),diff(f1(x),x));
      define(g2(x),diff(f2(x),x));
      penteM:g1(xM);
      penteN:g2(xN);

(%i9) tangM:y=penteM*(x-xM)+M[2];
      tangN:y=penteN*(x-xN)+N[2];
```

... et comme ci-dessous pour le calcul final.

3. 1. Première méthode pour obtenir les tangentes communes

Une première méthode, spontanément suivie par quelques étudiants, consiste à écrire les tangentes aux deux paraboles et à chercher à égaliser d'une part leurs pentes et d'autre par l'ordonnée en l'un des points de contact : les deux droites sont alors parallèles et passent par un même point, elles sont

L'étudiant qui devait exposer ce travail avait choisi cette méthode. Et si la valeur formelle de x_M est bien acceptée, numériquement, par le logiciel (GeoGebra) il ne pouvait pas en être de même avec x_N puisque, pour valider instantanément ses calculs, l'étudiant avait naturellement choisi de placer les six points définissant les deux paraboles dans un cas évident de solutions : les paraboles sont disjointes et les coefficients a_1 et a_2 de signes contraires.

```
(%i9) tangM:y=penteM*(x-xM)+M[2];
      tangN:y=penteN*(x-xN)+N[2];

(%o9) y=a1 xM^2+(x-xM)(2 a1 xM+b1)+b1 xM+c1
(%o10) y=a2 xN^2+(x-xN)(2 a2 xN+b2)+b2 xN+c2

(%i11) algsys([penteM=penteN,a1*xM^2+(x-xM)*(2*a1*xM+b1)+b1*xM+c1=a2*xN^2+(x-xN)*(2*a2*xN+b2)+b2*xN+c2],[xM,xN]);
(%o11) [[xM=-sqrt(4 a1^2 a2^2-4 a1 a2^2) c2+(4 a1 a2^2-4 a1^2 a2) c1+a1 a2 b2^2-2 a1 a2 b1 b2+a1 a2 b1^2+a1 b2-a1 b1
      / (2 a1 a2-2 a1^2),xN=-sqrt(a1) sqrt(a2) sqrt(-4 a2 c2+4 a1 c2+4 a2 c1-4 a1 c1+b2^2-2 b1 b2+b1^2+a2 b2-a2 b1)
      / (2 a2^2-2 a1 a2)], [xM=
      sqrt(4 a1^2 a2^2-4 a1 a2^2) c2+(4 a1 a2^2-4 a1^2 a2) c1+a1 a2 b2^2-2 a1 a2 b1 b2+a1 a2 b1^2-a1 b2+a1 b1
      / (2 a1 a2-2 a1^2),xN=-sqrt(a1) sqrt(a2) sqrt(-4 a2 c2+4 a1 c2+4 a2 c1-4 a1 c1+b2^2-2 b1 b2+b1^2+a2 b2-a2 b1)
      / (2 a2^2-2 a1 a2)]]
```

Pour remplir le cahier des charges du projet qui demandait à ce que l'on voie sur la figure les points d'intersections des tangentes communes avec les paraboles, il y avait la solution évidente d'écrire y_N par l'égalité des pentes : $2a_1x_M + b_1 = 2a_2x_N + b_2$. Mais cela n'a pas été le choix de l'étudiant.

Pressé par le temps, centré sur « le problème immédiat » du non rendu de la formule qu'il avait tapée dans GeoGebra, l'étudiant a eu une réaction extraordinaire, assez imprévisible. Il n'a vu qu'un obstacle à dépasser, les racines carrées de nombres négatifs, et il l'a exposé ainsi : « j'ai pris les valeurs absolues des trois termes sous les racines, et ça marche, ça donne bien le bon point ».

N'ayant moi-même pas suivi cette démarche, j'ai été d'une part surpris du problème rencontré et surtout profondément interloqué par la méthode de résolution expéditive proposée. Avant d'analyser plus en profondeur cette situation, voyons d'abord une autre méthode de résolution.

3. 2. *Seconde méthode pour obtenir les tangentes communes*

En 1°S, cet exercice sert surtout à construire une culture fine de la relation algébrique entre les racines des polynômes et leur factorisation.

La démarche traditionnellement utilisée consiste à construire la tangente en un point M à la première parabole et à tester si celle-ci coupe ou non la seconde parabole. L'intersection est solution d'une équation du second degré, avec, éventuellement une racine double qui correspond à la situation de tangente à la seconde parabole, avec ce sens que deux intersections confondues correspondent à une factorisation en $(x - x_0)^2$ pour le polynôme.

```
(%i1) f1(x):=a1*x^2+b1*x+c1;
      f2(x):=a2*x^2+b2*x+c2;
      define(g1(x),diff(f1(x),x));
(%i4) tangf1M(x):=g1(xM)*(x-xM)+f1(xM);
      f2(x)-tangf1M(x);
(%i6) ratsimp(%);
(%i7) delta:(b2-b1-2*a1*xM)^2-4*a2*(c2-c1+a1*xM^2);
(%i8) solve(delta=0,xM);
```

C'est donc une utilisation subtile du déterminant, d'où un TP guidé, en général, en 1°S. La version formelle adoptée ici donne alors le résultat ci-dessous. Dans cette version, le calcul de x_Q ne pose pas de problème puisqu'il s'agit de la racine double « $-b/2a$ » de l'expression notée %i43, soit

$$x_Q = \frac{b_1 - b_2 + 2a_1x_M}{2a_2}$$

donc directement exploitable dans un logiciel de géométrie dynamique à partir de x_M .

```
(%i8) solve(delta=0,xM);
(%o8) [ xM=

$$\frac{\sqrt{(4 a_1^2 a_2 - 4 a_1 a_2^2) c_2 + (4 a_1 a_2^2 - 4 a_1^2 a_2) c_1 + a_1 a_2 b_2^2 - 2 a_1 a_2 b_1 b_2 + a_1 a_2 b_1^2 - a_1 b_2 + a_1 b_1}}{2 a_1 a_2 - 2 a_1^2}, xM = -$$


$$\frac{\sqrt{(4 a_1^2 a_2 - 4 a_1 a_2^2) c_2 + (4 a_1 a_2^2 - 4 a_1^2 a_2) c_1 + a_1 a_2 b_2^2 - 2 a_1 a_2 b_1 b_2 + a_1 a_2 b_1^2 + a_1 b_2 - a_1 b_1}}{2 a_1 a_2 - 2 a_1^2} ]$$

```

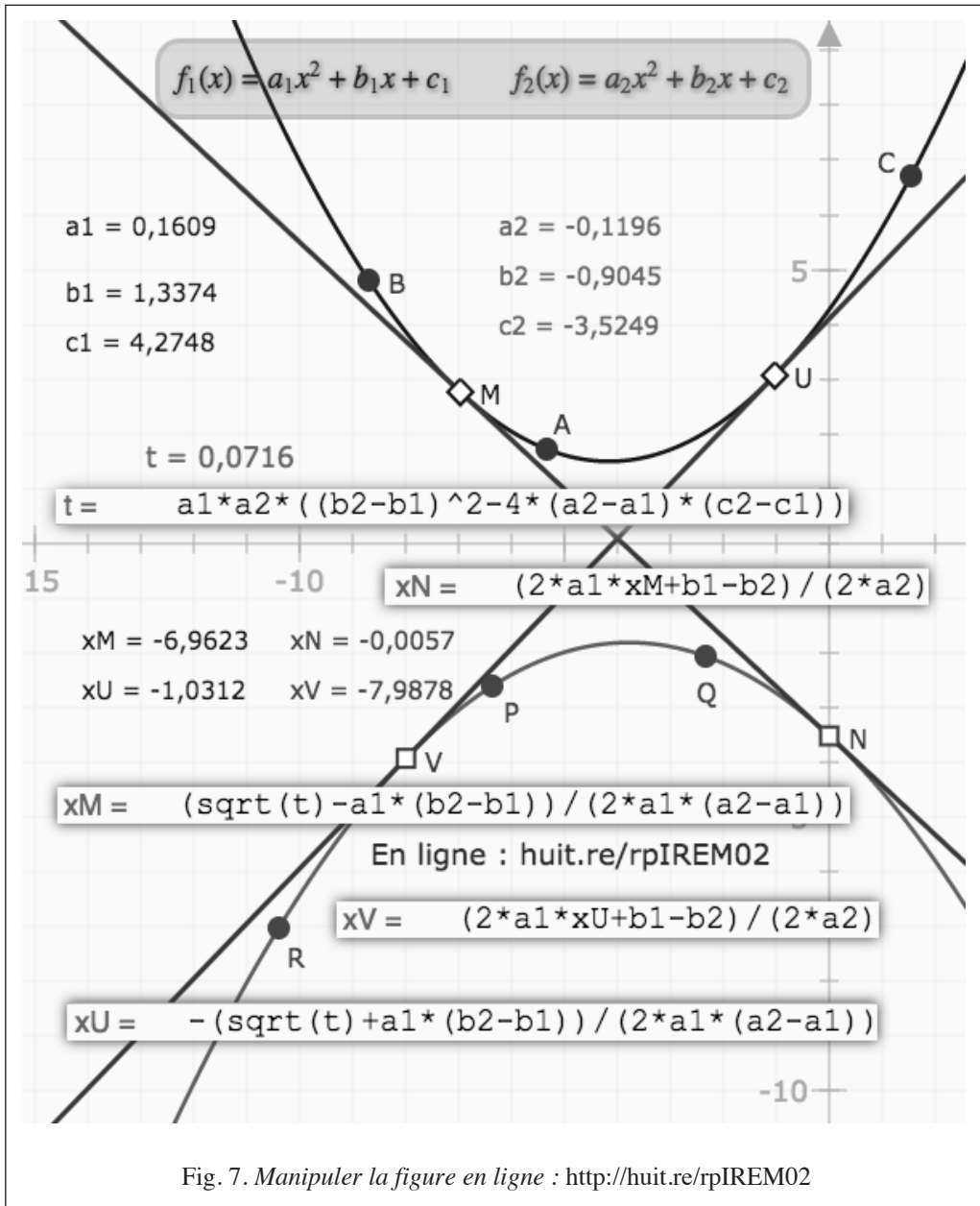



Fig. 7. Manipuler la figure en ligne : <http://huit.re/rpIREM02>

C'est d'ailleurs la même expression que celle de l'égalité des pentes de la méthode précédente. On remarquera que les écritures des deux solutions sont formellement les mêmes dans les deux méthodes, elles sont seulement inversées dans leur ordre d'apparition.

4. — L'évolution du rapport au savoir dans une société en mutation

Telle qu'elle vient d'être présentée, la mise en œuvre de cette activité, dans un master M2 MEEF, illustre l'évolution culturelle du rapport au savoir des futurs enseignants, et plus généralement l'ambiguïté sociétale sur le retournement des valeurs que décrit Michel Serres, dans « Petite Poucette » quand le « cognitif procédural », le serviteur de Socrate qui « use de procédures », prend le pas sur les « abstractions déclaratives », le discours de Socrate lui-même. Cette ambiguïté, celle d'une société qui entre dans une nouvelle ère, où de nouvelles valeurs se construisent et d'autres s'estompent, est présente, d'une façon ou d'une autre, dans nos activités de formation initiale. Elle se traduit aussi par un affichage institutionnel « du socle des compétences », et la mise en valeur de ses activités de tâches complexes, tout en prônant une évaluation de fin d'étude par des examens qui ignorent encore largement ces compétences mises en valeur tout au long de la scolarité, même si c'est entrain d'évoluer avec les tout nouveaux programmes rendus publics mi avril.

Comme formateur des futurs enseignants, il n'est pas question de s'opposer à cette évolution. Au contraire, notre rôle est de l'accompagner, en devenant des transmetteurs, traducteurs de ces valeurs à l'obsolescence programmée pour les faire vivre autrement dans le nouvel environnement culturel en construction. Historiquement, ceux qui se sont opposés aux évolutions profondes de leur société n'ont fait que

retarder les choses. Les druides en Europe comme les Brahmanes en Inde se sont longtemps opposés à l'externalisation des textes sacrés de la mémoire humaine vers l'écriture. Ils ont réussi à retarder l'enseignement de l'écriture, pourtant limité à quelques privilégiés dans des lieux privilégiés, pendant longtemps, pour des questions évidentes de pouvoir. Ne devenons pas les druides du savoir savant en freinant l'externalisation de certaines compétences, liées au calcul savant, vers d'autres formes de compétences, liées aux capacités de simulation.

4. 1 *Du jeu de cadres au jeu de paradigmes*

Notre société évolue d'un monde, encore existant et vivant, en science au moins, où les formes canoniques du savoir sont la théorisation, selon des critères d'objectivité et d'universalité, vers un monde ou l'instantanéité, le temps réel, ou au minimum la vitesse d'exécution, mais aussi les compétences opérationnelles sont des valeurs qui se présentent comme désormais structurantes pour la société. Le rapport au temps invitait au délai, à la réflexion, et donc à la critique argumentée. Par exemple il n'était pas rare, il y a encore quelques années, que les actes d'un colloque soient disponibles sous forme papier, seulement deux ou trois ans après le colloque. Les délais de retour permettaient aux auteurs de modifier, enrichir leurs articles après les rencontres provoquées par le colloque. Ce monde de la distanciation n'est plus la norme. Le temps réel s'est aussi invité là. Les actes des grands congrès sont désormais souvent disponibles, sous forme numérique, à l'ouverture du congrès. Paradoxalement le temps réel apporte de la rigidité, l'article ayant été parfois écrit six ou quatre mois avant son exposition. Par ailleurs, même pour les instances académiques, l'écriture sert désormais aussi à autre chose que de référencer le savoir savant. Avec les réseaux sociaux, les messages, y compris des grandes

institutions, ne sont pas émis pour s'inscrire dans le temps, mais au contraire pour témoigner, d'une certaine façon, de sa présence au présent du récepteur (follower).

L'étudiant futur enseignant, en formation initiale, est confronté à la fois à cette mutation générale des valeurs, qu'il vit individuellement, mais surtout à leur superposition permanente, y compris dans les programmes des concours de recrutement et donc dans sa future vie professionnelle. Pour illustrer cela, souvenons nous, par exemple, des efforts énormes réalisés par les mathématiciens du début du XX^{ème} siècle (Frege en particulier à partir de 1904) pour extraire le champ fonctionnel du registre temporel auquel la relation à la cinématique l'ancrait définitivement. Cette sortie du registre temporel (pour toutes les mathématiques en général) a été considéré comme une condition indispensable à la réification des concepts mathématiques, la « réifiabilité » des concepts étant elle-même, considérée comme nécessaire pour leur acceptation par les mathématiciens.

Dans les concours de recrutement, l'admissibilité est construite sur le modèle de la théorisation, validant l'acquisition des savoirs et un rapport à ce savoir en adéquation avec la démarche théorique, par la rédaction de preuves mathématiques, démonstrations. L'admission est organisée autour d'épreuves orales, professionnalisantes, plutôt placées dans la mutation sociétale décrite plus haut, avec utilisation obligatoire des TICE. L'admission valide, entre autres, des compétences de simulation en analyse, où l'usage explicite du mouvement - et donc du temps - pour rendre compte des propriétés des fonctions, globales comme locales, est largement encouragé par l'institution.

La validation des deux parties des concours de recrutement est donc construite sur des valeurs profondément opposées. Le discours offi-

ciel préfère parler de complémentarité de ces valeurs, en particulier parce qu'elles sont évaluées en des temps différents et toutes nécessaires à l'exercice de la profession. Argument tout à fait recevable tant nous étions longtemps restés, pour les concours, loin, très loin, du côté de la théorie.

En pratique, ce discours, ces contraintes institutionnelles induisent, à l'image du changement de cadres de Régine Douady, une circulation permanente entre deux paradigmes, celui de la culture écrite des mathématiques, avec ses codes, ses déclinaisons didactiques bien connues, et celui d'une autre culture mathématique, en cours de construction, celle de l'opérationnalité immédiate, de la simulation systématique pour donner à voir et à manipuler avec des outils numériques, les concepts mathématiques abstraits, ou des représentations de ces concepts. Tout comme les jeux de cadres sont d'une grande richesse didactique, il est clair que les jeux de paradigmes, par la richesse et la complexité du milieu qu'ils engagent, vont l'être aussi, largement, à condition toutefois, comme pour les jeux de cadres, d'abord de les faire vivre et surtout de conscientiser cette circulation.

Une première possibilité, voire un premier devoir vis à vis de cet enjeu de circulation, pour chacun, étudiant comme formateur, est celle de la praxéologie, du discours que nous allons soutenir sur notre pratique, le formateur vis à vis de l'étudiant, l'enseignant vis à vis de l'élève, et en particulier, le discours du praticien réflexif, qui évalue son action en cours d'action. En précisant dans quel registre de cette complémentarité on se place, à un moment de l'activité, et quelle articulation se construit, dans cette interaction des paradigmes, par une action, par de l'accompagnement discursif théorique, technique ou méthodologique, chacun peut accompagner la conscientisation de cette circulation.

4. 2. Illustration pratique

Pour illustrer cela, reprenons l'attitude de l'étudiant qui prend des valeurs absolues et *affiche les valeurs correctes de x_Q* .

4. 2. 1 Superposition des paradigmes et réduction

Tout d'abord, on remarquera qu'en travaillant sur du calcul formel en interaction avec la géométrie dynamique (GD), considérée comme support de sortie dynamique (manipulation directe) et intelligent (intégration de toutes les relations algébriques), nous nous plaçons, tous, spontanément, pour confirmer les calculs, dans un cas où il y a une solution. Il en résulte que chacun trouve naturel que les instantiations numériques des paramètres en jeu existent réellement, y compris avec la racine carrée utilisée dans x_M . On est dans une sorte de superposition optimale des paradigmes : l'aspect théorique, par la production d'un calcul un peu complexe mais utilisable par les logiciels de GD, est en phase avec les valeurs d'instantanéité et de simulation du nouveau paradigme car il suffit de copier-coller l'expression formelle dans le logiciel de GD pour avoir tout de suite l'abscisse de M et donc construire M. Spontanément, on ne se pose pas la question de l'existence effective des objets manipulés (la positivité du radicande) : on sait qu'il y a une solution, elle est donnée par cette relation formelle, on la rentre dans le logiciel, on obtient le point, solution dynamique du problème cherché.

En agissant ainsi, le praticien réflexif est-il dans l'ancien paradigme, théorique, dont le nouveau, va servir d'illustration ? Est-il dans le nouveau paradigme, centré sur l'efficacité de la construction d'une solution dont l'ancien donne les expressions de ces solutions ? En fait, c'est généralement indéfini. Plus que le passage de l'un à l'autre et d'une éventuellement rela-

tion causale, il y a cette idée d'être a priori dans une superposition de ces deux « états », la circulation mentionnée plus haut n'étant pas un tourbillon permanent mais plutôt un champ de force qui maintient cette cohérence interne à notre propre état en cours d'action : tout est là, au présent, tout fonctionne. Comme on prend souvent conscience d'un contrat didactique au moment de sa rupture, on prend généralement conscience de cette superposition quand elle s'écroule. C'est l'épisode de l'étudiant qui met des valeurs absolues aux trois radicandes pour avoir une solution. Il se retrouve tout d'un coup dans un des deux paradigmes, celui de la simulation, l'autre dimension ayant, à cet instant, disparue. Il n'y a plus de distanciation réflexive : les valeurs absolues donnant la solution, l'étudiant semble soulagé non seulement par sa figure, mais de ses calculs, voire peut-être de son « interprétation » des calculs produits par wxMaxima. Un autre étudiant aurait pu avoir une attitude opposée, et au lieu de chercher à construire à tout prix les tangentes communes, se serait recentré sur le résultat algébrique pour essayer d'en retravailler la forme. Il aurait cristallisé son action dans l'autre paradigme.

Or quand la réduction d'une superposition s'effectue, le plus souvent elle s'applique aussi, temporellement, à l'environnement. Ainsi, alors que j'étais au fait de l'écriture simplifiée pour l'abscisse de l'autre point, pris par la démarche de l'étudiant, je me suis entendu lui expliquer tout à fait autre chose : « quitte à tricher, autant le faire d'une manière mathématiquement correcte. Vous auriez pu construire la tangente en x_M à la première parabole et bidouiller une intersection avec la seconde quitte même à utiliser l'objet conique de GeoGebra associé pour une meilleure stabilité de l'intersection, je n'aurais même peut-être rien vu ».

Cette prégnance sur l'environnement du paradigme vers lequel s'est réduit une superposition

est un phénomène déjà largement décrit dans d'autres sciences sous le terme d'empathie cognitive (capacité à la représentation des états mentaux d'autrui) ou encore, par une forme conceptuelle d'une empathie comportementale (mimétisme, ici procédural).

Ce qui nous paraît notable ici, c'est de remarquer que si le formateur est effectivement happé par l'engagement de l'étudiant dans le paradigme de l'immédiateté et de simulation, il l'est dans sa totalité, au sens où sa propre superposition n'en n'est pas altérée. On le voit à deux endroits, celui où spontanément il est question de faire « de manière mathématiquement correcte » ou encore avec cette précision pour obtenir une « stabilité de l'intersection ». Il semble donc qu'une installation de longue date dans cette situation en assure une certaine solidité intrinsèque.

4. 2. 2 Instrumentation pour la mise en place d'une superposition des paradigmes

Dans notre société en pleine mutation numérique, la sensibilisation des futurs enseignants à cette problématique de transferts et superposition institutionnelle de paradigmes assez antagonistes nous paraît être dévolue à la formation initiale. Sensibilisation, prise de conscience, verbalisation des différents enjeux qui vont rapidement concerner leur pratique quotidienne de classe peuvent être intégrées aux séances TICE sans nécessairement beaucoup de moyens, simplement en organisant un peu différemment les activités proposées. En particulier, une des pistes d'instrumentation efficace à la superposition des paradigmes est de travailler explicitement plus sur la praxéologie, quand c'est possible par des échanges de pair à pair, ce qui peut être nouveau pour le formateur comme pour le futur enseignant.

Avec la présence curriculaire insistante des TICE dans les oraux des concours (et dans

les programmes) nous sommes loin des premières réactions d'hostilité que nous avons pu rencontrer à l'époque où nous pratiquions les NTIC (fin du siècle précédent), avec parfois des étudiants pour qui « faire des maths, ce n'est pas tenir une souris ». Au contraire, on voit désormais arriver des étudiants qui, dans leur toute puissance créatrice, se sentent rapidement comme des ingénieurs de GeoGebra, jonglant avec les séquences, le GéoTableur, et les fonctionnalités en statistique, ou encore, découvrant tout le potentiel didactique de l'aimantation de CaR-Metal pour réaliser des simulations abouties, s'installe naturellement, comme futur enseignant, dans le nouveau paradigme qui leur est proposé, si proche en fait de leur vécu numérique personnel. La puissance des outils proposés et leur adéquation aux objectifs scolaires, est à la fois un puissant aimant et en même temps une caution institutionnelle à cette installation.

On entend régulièrement parler de l'attitude nouvelle des « digital native ». Force est de constater que, depuis quelques années - même si on a commencé l'article par un contre exemple - un pourcentage non négligeable d'étudiants, sans nécessairement avoir réfléchi à cette problématique et être conscient de l'évolution des paradigmes, en situation sur une activité, savent se placer spontanément dans cette superposition par une sorte « d'attitude en acte » naturellement pertinente. En formation, la présence de ces étudiants est un atout extraordinaire car leur intervention, provoquée mais qui reste un échange pair à pair, permet d'illustrer en quoi cette superposition est une circulation régulière et systématique (on évitera la brutalité d'un mot comme « permanente ») entre l'univers de la théorie et celui de la simulation mais aussi en quoi cette superposition des paradigmes, par ses éclairages, est le contraire de la confusion. Le contraire de la confusion *et de la contrainte*, car, comme l'exemple cité, pour certains,

INSTRUMENTATION DU CALCUL
FORMEL ET GEOMETRIE DYNAMIQUE

l'ancrage dans la simulation est clairement un évitement du paradigme antérieur, celui de leurs années d'études, évalué d'un coup, à la lumière de la simulation comme trop lourd.

L'instrumentation de cette circulation n'a pas besoin d'activités aussi riche que celle proposée ici. Si elle trouve une pertinence renforcée par la pratique conjointe de deux logiciels différents dans une même activité, cette condition n'est pas nécessaire. Une simple situation géométrique nécessitant un calcul et une argumentation suffit. Voici (figure 8) l'exemple (en L2) d'une illustration dynamique du calcul de la position du centre de la composée de deux homothéties.

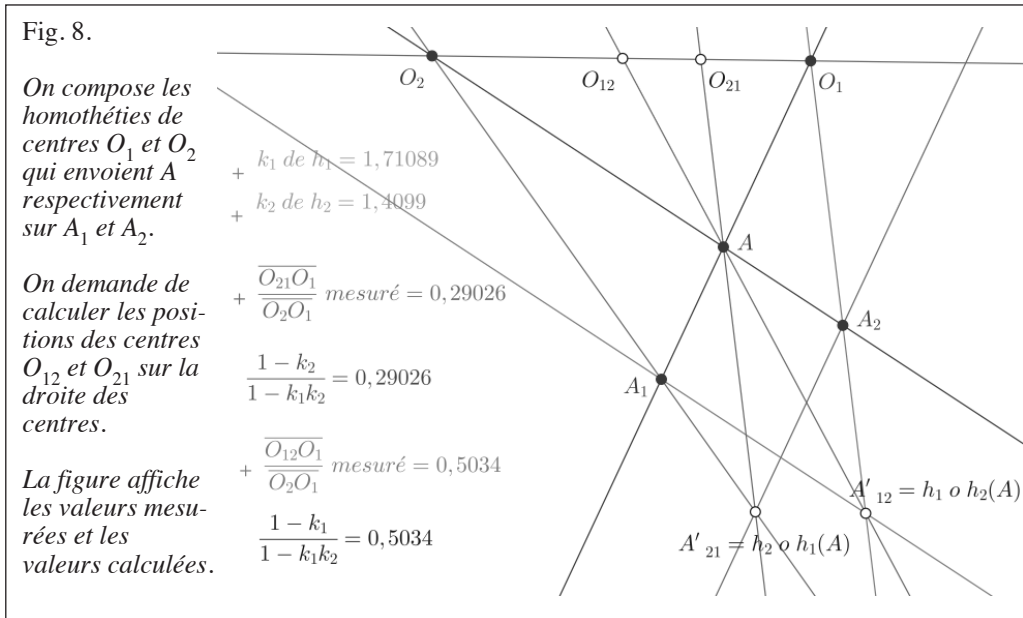
Déjà, dès la licence, cela permet d'installer, même modestement, cette circulation : la simple mesure du résultat sur le logiciel n'est, mathématiquement, d'aucun intérêt. Elle ne

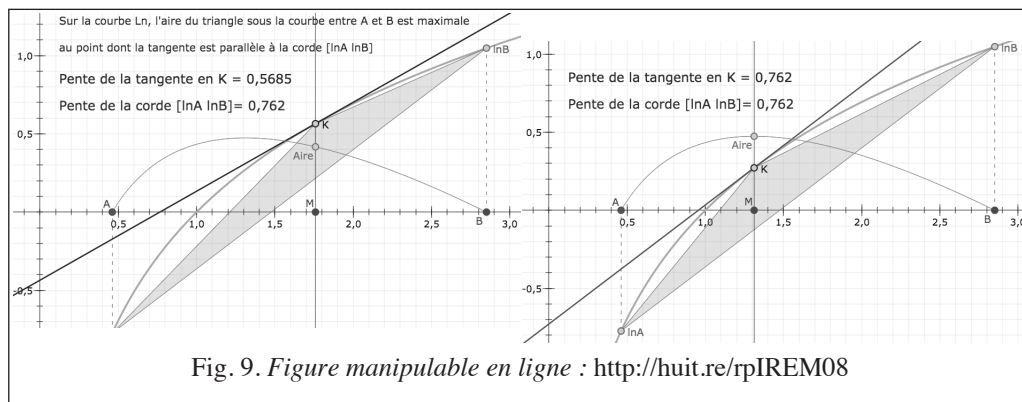
peut servir qu'à illustrer ou valider le résultat théorique (d'où la circulation).

Encore plus simplement, une figure géométrique qui contient des cas particuliers — que l'on peut atteindre par exemple par aimantation — est aussi un bel exemple de sensibilisation initiale. Dans la figure suivante, on illustre (toujours un exercice de licence) que sous une courbe concave, l'aire maximale d'un triangle PKR de trois points sur la courbe est atteinte quand la pente de la tangente du point intermédiaire K, supposé variable, est égale à la pente de la droite (PR). Le point K qui réalise ceci ne peut pas être atteint par manipulation à la souris. Par exemple ici avec la fonction ln , il a pour abscisse ,

$$\frac{x_R - x_P}{\ln x_R - \ln x_P}$$

M est donc aimanté par ce point.



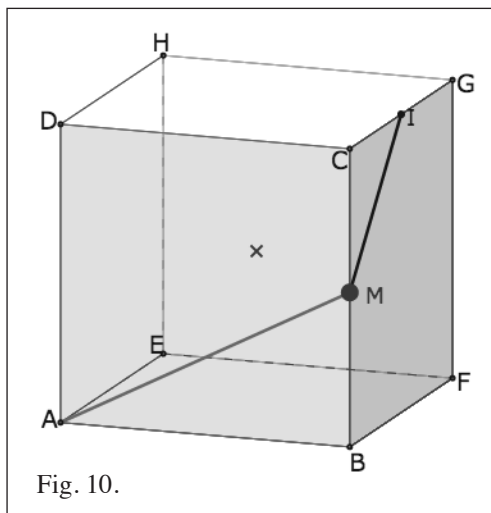


Même dans le cas où on est fortement installé dans le paradigme du numérique pour construire, en formation, une simulation significative, on peut ajuster notre discours — par exemple en analysant les procédures a priori et comment les gérer — autour de cette problématique de superposition.

Dans l'exercice ci-contre à destination d'une classe de 3°, I est le milieu de l'arête [CG] d'un cube, on cherche la position de M sur l'arête [BC] pour que le trajet de A à I en passant par M soit minimal.

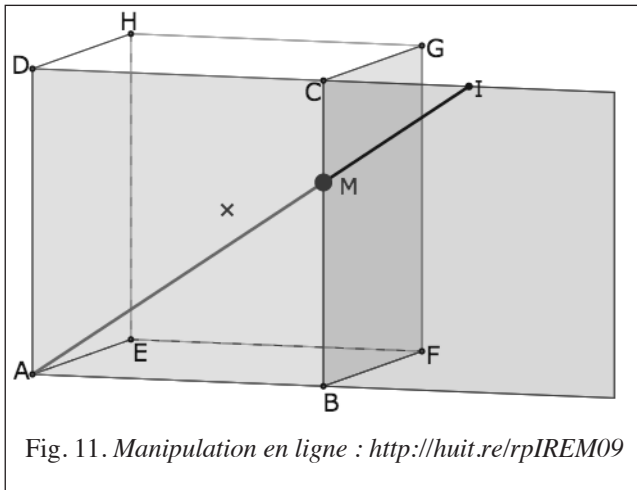
Présenté sans indication, les élèves pourraient y voir un exercice autour de Pythagore pour les calculs intermédiaires ($x = BM$, etc.) et se lancer dans des calculs longs et fastidieux pour eux. L'analyse a priori, du côté de la théorie, demanderait de trouver un procédé — de simulation — pour leur éviter ces calculs et cette perte de temps.

Donner comme indication seulement la possibilité d'ouvrir une face (éventuellement seulement si on s'approche assez près de la solution), est une aide conceptuelle originale que seule une simulation numérique autorise. Sur



la figure en ligne d'autres données permettent de vérifier numériquement si on a atteint le minimum, ce qui peut ensuite engager une nouvelle réflexion (voir figure 11 page suivante).

On voit sur cet exemple que la superposition des paradigmes est présente dans l'analyse et la conception didactique d'une activité de simulation dans laquelle on se propose de faire



reconnaître une propriété de Thalès aux élèves alors qu'ils sont, pour une grande partie, convaincus qu'il s'agit d'un exercice de calcul avec Pythagore, cette rencontre avec Thalès s'opérant sans indication textuelle, par la simple présence d'un curseur d'ouverture.

Ces quelques exemples de sensibilisation montre que cette problématique de la superposition des paradigmes, si elle est partout présente, est aussi une question de point de vue. Pourtant, même sur des situations élémentaires, il s'agit à chaque fois d'autre chose que le traditionnel jeu de cadre. On voit aussi qu'une instrumentation progressive, à travers des activités de simulation, associée à un discours adapté permet de consolider la circulation entre les paradigmes et par la même la cohérence de l'utilisation des TICE en maintenant une qualité mathématique de l'argumentation. La pratique des TICE intègre réellement les deux paradigmes sur lesquels reposent les programmes quand cette circulation - cette superposition - s'est construite dans la pratique personnelle de l'enseignant.

Poursuivons maintenant sur l'activité initiale des tangentes communes à deux paraboles

5. — Analyse du résultat formel et mise en forme des objets à construire

wxMaxima, avec sa factorisation par $\sqrt{a_1}\sqrt{a_2}$ dans la seconde solution nous ouvre la voie.

La partie sous la racine carrée dans l'expression de x_M (voir paragraphe 3. 2.) se factorise sous la forme :

$$t = a_1 a_2 [(b_2 - b_1)^2 - 4(a_2 - a_1)(c_2 - c_1)].$$

Si $t > 0$, et si $a_2 \neq a_1$ il y a deux solutions, x_M et x_U sur la parabole liée à f_1 , et, respectivement, x_N et x_V sur celle liée à f_2 .

- Première solution :

$$x_M = \frac{\sqrt{t} - a_1(b_2 - b_1)}{2a_1(a_2 - a_1)}$$

et
$$x_N = \frac{b_1 - b_2 + 2a_1 x_M}{2a_2}.$$

- Seconde solution :

$$x_U = \frac{\sqrt{t} + a_1(b_2 - b_1)}{2a_1(a_2 - a_1)}$$

et
$$x_V = \frac{b_1 - b_2 + 2a_1 x_U}{2a_2}.$$

Dans la première méthode, celle pour laquelle

Maxima sort $a_1 a_2$ de t , l'expression de x_N est donnée en fait par :

$$x_N = \frac{\sqrt{t + a_2(b_1 - b_2)}}{2a_2(a_2 - a_1)}$$

Dans le cadre de notre analyse, les écritures de x_N et x_V , sans référence directe à t mais aux autres points de contact relève encore une fois de cette superposition au sens où on fait à la fois fonctionner l'aspect théorique de la démarche, et on le fait (aussi) pour optimiser les calculs dans la figure de géométrie dynamique. Non indispensable encore ici, cette attitude sera incontournable dans le cas général des paraboles tangentes pour obtenir des figures dynamiques fluides malgré des calculs complexes.

5. 1. Cas où il y a deux tangentes communes (distinctes)

Bien entendu il y a des solutions si et seulement si $t > 0$, mais on peut avoir envie de transformer cette condition algébrique en interprétation topologique. Ici on est bien dans le jeu de cadre traditionnel de la didactique.

Notons $t = a_1 a_2 \Delta$ où Δ est le discriminant de $f_2(x) - f_1(x)$. On suppose, dans ce paragraphe, que $a_2 \neq a_1$ (et les deux termes non nuls, on a de vraies paraboles).

- Si $\Delta < 0$, les deux paraboles sont disjointes.
 - Si $a_1 a_2 > 0, t < 0$, une des paraboles est à l'intérieur de l'autre, il ne peut y avoir de tangentes communes.
 - Si $a_1 a_2 > 0, t > 0$, les quatre valeurs précédentes existent ($a_2 \neq a_1$) et construisent effectivement les tangentes communes aux deux paraboles, c'est le cas générique.

- Si $\Delta > 0$, les deux paraboles ont deux points d'intersection.

- Si $a_1 a_2 > 0, t > 0$, les quatre valeurs précédentes existent et construisent les tangentes communes aux deux paraboles.
- Si $a_1 a_2 > 0, t < 0$, les points n'existent pas, il ne peut y avoir de tangentes communes.

Voir page suivante (figure 12) les quatre cas illustrés avec deux logiciels — GeoGebra et DGPad — et deux approches différentes, selon que l'on utilise des curseurs ou pas.

Le jeu de cadre sur l'engagement direct (les curseurs pour travailler sur les paramètres des fonctions, les points pour disposer des paraboles en manipulation directe), par les interrogations qu'il suscite, fait lui aussi travailler cette circulation interne entre les aspects théoriques et la dimension de manipulation. En effet, toucher aux points nous place tout de suite dans des conditions génériques car trois paramètres sont modifiés en même temps.

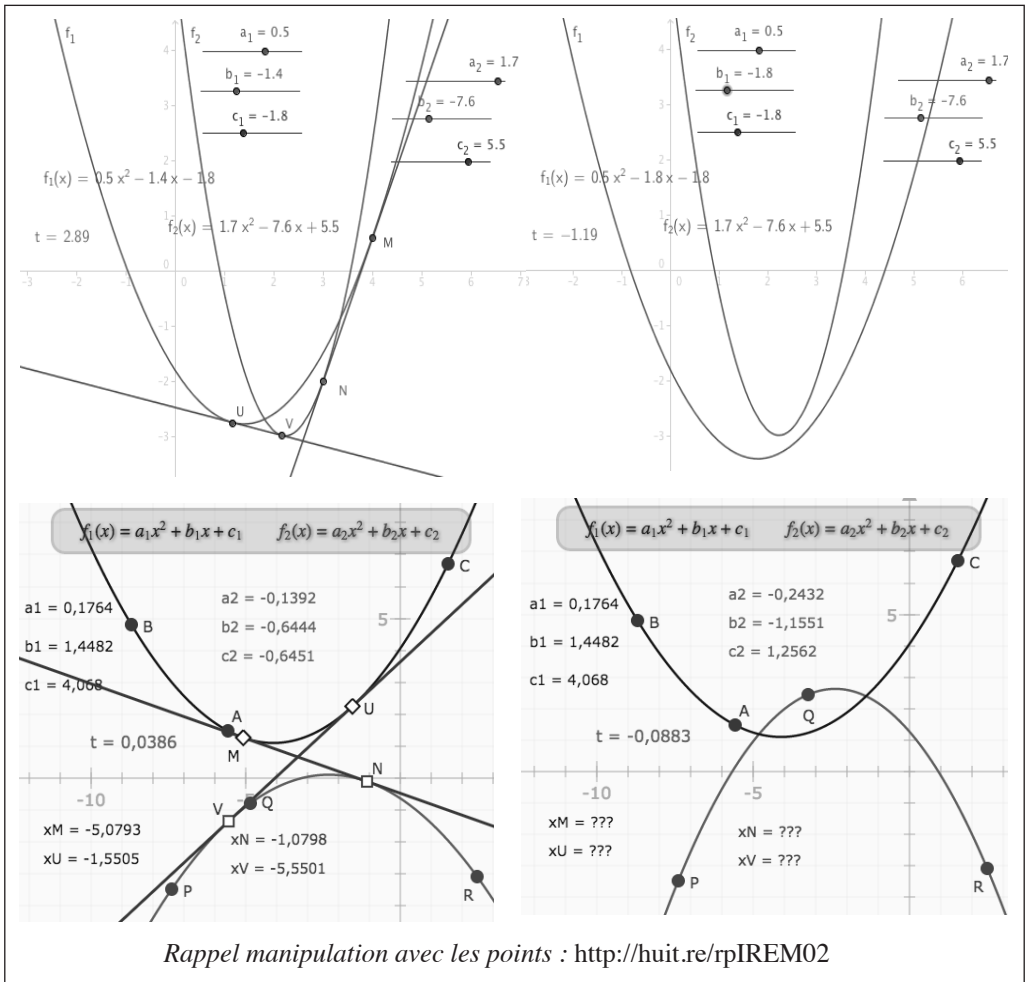
La version curseur semble alors se cantonner à des registres plus restrictifs, car on ne peut manipuler qu'un paramètre à la fois.

Et pourtant, si elle est moins générique en manipulation, elle permet, pour l'aspect théorique, de passer par tous les cas particuliers inaccessibles avec les paraboles par points.

En manipulant les figures dynamiques, par points ou par curseurs, on voit deux cas particuliers survenir : celui, qui ressort de l'étude théorique, cas où (plutôt avec les points car dans l'autre cas les constructions disparaissent) et celui où, en dehors de cette égalité, les tangentes communes tendent à se confondre néanmoins en une seule, les paraboles devenant alors tangentes entre elles. Examinons ces deux situations.

INSTRUMENTATION DU CALCUL FORMEL ET GEOMETRIE DYNAMIQUE

Fig. 12.



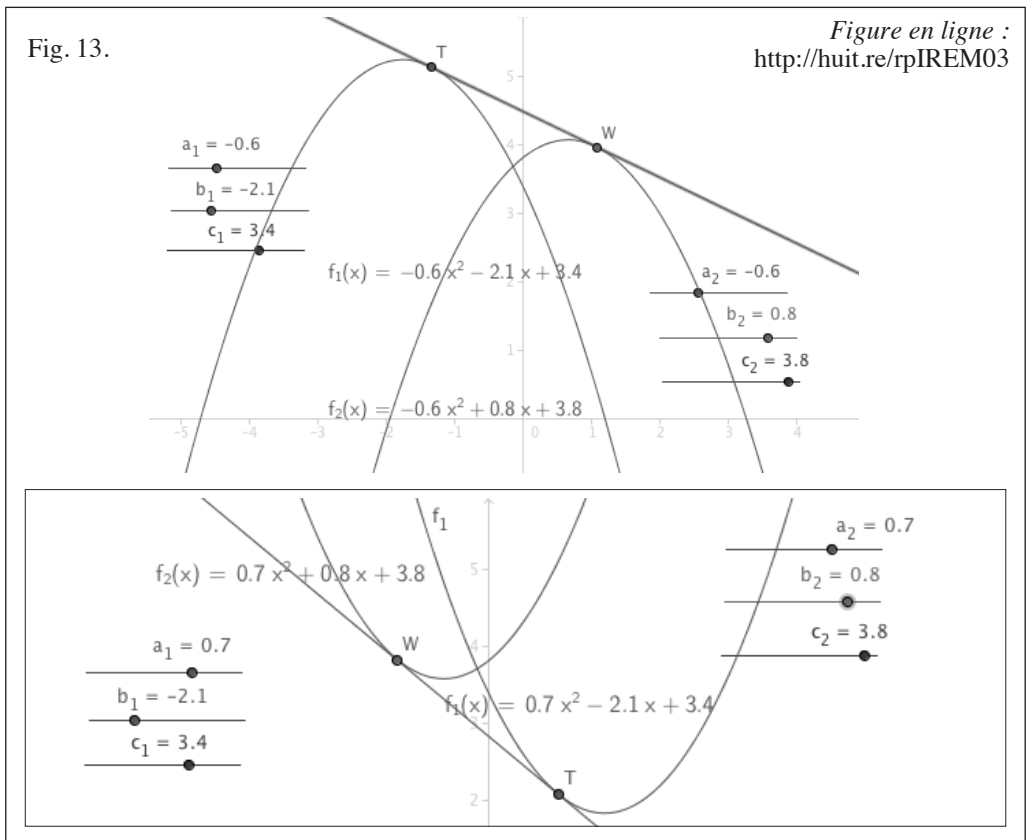
5. 2. Cas où il y a une seule tangente commune (figure 13)

On suppose maintenant que $a_2 = a_1$. Dans ce cas, sauf bien entendu si les deux paraboles sont en translation de direction verticale ($a_2 = a_1$ et $b_2 = b_1$), il y a toujours une tangente commune, et elle est unique. Le lecteur retrou-

vera rapidement que le point de contact de cette tangente à la première parabole est d'abscisse

$$x_T = \frac{c_1 - c_2}{b_2 - b_1} + \frac{b_2 - b_1}{4a_1}$$

et que, par l'égalité des pentes, l'abscisse du point de contact à la seconde parabole est : $x_W = x_T - \frac{b_2 - b_1}{2a_1}$.



5. 3. Cas où les deux paraboles sont tangentes

Un autre cas, plus général, où il y a une seule tangente commune, est le cas où $\Delta = 0$. Les deux tangentes communes existent, mais elles sont confondues, et donc les paraboles sont tangentes entre elles au point de la racine double de l'équation $f_2(x) - f_1(x) = 0$. Ce

point est alors d'abscisse $\frac{b_1 - b_2}{2(a_2 - a_1)}$.

5. 3. a Version scolaire (figure 14)

De $\Delta = (b_2 - b_1)^2 - 4(a_2 - a_1)(c_2 - c_1) = 0$,

on tire : $c_2 = c_1 + \frac{(b_2 - b_1)^2}{4(a_2 - a_1)}$.

Dans le cadre d'un travail en lycée, on peut aborder ce thème des paraboles tangentes, à partir des paramètres des fonctions du second degré : cinq paramètres sont libres, le sixième, c_1 ou c_2 , ou encore a_1 ou a_2 étant alors entièrement déterminé. Dans ce cas la construction

INSTRUMENTATION DU CALCUL
FORMEL ET GEOMETRIE DYNAMIQUE

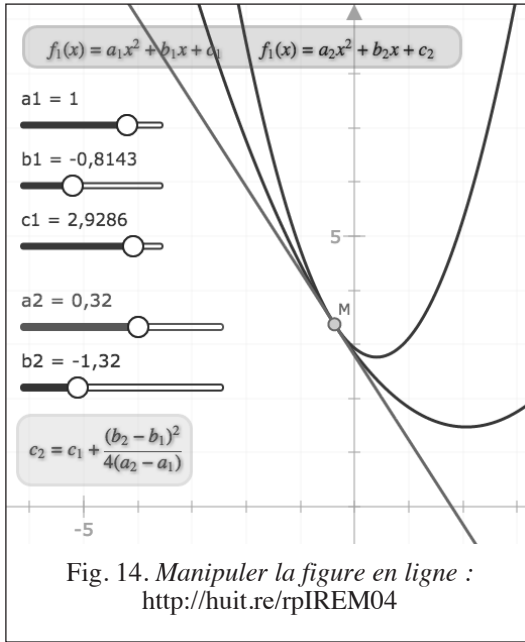


Fig. 14. Manipuler la figure en ligne : <http://huit.re/rpIREM04>

est triviale. On observera que l'abscisse de M est indépendante de c_1 et la formule de c_2 montre qu'en faisant varier c_1 , les deux paraboles se déplacent en translation.

5. 3. b Effet du changement de cadre de l'engagement direct (figure 15)

On se propose maintenant de reprendre notre changement de cadre de l'engagement direct, en se donnant une première parabole par trois points et en cherchant une seconde parabole, passant par deux points donnés P et Q (variables, donc des paramètres) et le troisième point M qui sera le point de contact des deux paraboles, tangentes en M.

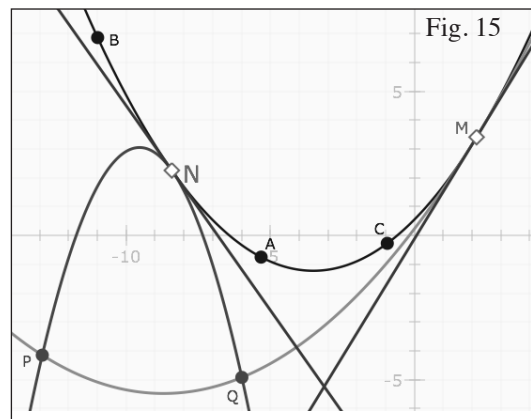
On pourrait penser que, posé ainsi, le problème n'est pas vraiment différent de la version différente. Cela a été un peu le cas pour la

recherche d'une parabole (curseur ou 3 points) : on avait, grâce à l'engagement direct différent, un changement de point de vue sur les activités possibles, mais presque la même solution. Ici la solution est très différente: avec un environnement de curseurs on avait une seule solution, cette fois, il va y avoir deux solutions comme ci-dessous, figure 15, (contacts en M et N).

D'un point de vue technique, les solutions vont être nettement plus complexes car, à partir de A, B, C (première parabole) et P et Q (seconde parabole), les solutions en (a_2, b_2, c_2) pour avoir un troisième point M point de contact des deux paraboles, donnent deux triplets dont on voit ci-dessous qu'une première valeur de a_2 peut être positive alors que la seconde est négative.

Résolution formelle du problème :

- A, B, C étant donnés, les coefficients a_1, b_1, c_1 , de la fonction f_1 , sont eux aussi donnés, ce sont des paramètres entièrement définis par les trois points A, B et C.
- Le point de contact R est d'abscisse $\frac{b_1 - b_2}{2(a_2 - a_1)}$ et d'ordonnée $f_1(x_R)$.



- Les variables a_2, b_2, c_2 sont solutions du système non linéaire :

$$\begin{cases} a_2 x(P)^2 + b_2 x(P) + c_2 = y(P) \\ a_2 x(Q)^2 + b_2 x(Q) + c_2 = y(Q) \\ a_2 x_R^2 + b_2 x_R + c_2 = f_1(x_R) \end{cases}$$

Voici, dans l'encadré ci-dessous, ce que donne le premier triplet de (a_{21}, b_{21}, c_{21}) , respectivement... On cherche à simplifier toutes ces expressions.

Pour deux raisons, d'abord avoir une écriture où les radicaux utilisés vont être exactement liés à l'existence des paraboles tangentes, mais aussi — dans un second temps quand on a déjà intégré les solutions dans les figures et que le résultat est assez lourd à exécuter, en particulier sur tablette — pour simplifier les écritures pour plus de fluidité dynamique des figures. Là encore cette démarche est clairement une superposition des deux paradigmes, on va utiliser la puissance de l'un pour en donner à l'autre.

(%o11) $C2 \sqrt{y(P) - a1 x(P)^2 - b1 x(P) - c1} y(Q) + (-a1 y(P) + a1^2 x(P)^2 + a1 b1 x(P) + a1 c1) x(Q)^2 + (-b1 y(P) + a1 b1 x(P)^2 + b1^2 x(P) + b1 c1) x(Q) - c1 y(P) + a1 c1 x(P)^2 + b1 c1 x(P) + c1^2 + y(Q) + (-2 a1 x(P) - b1) x(Q) + y(P) - b1 x(P) - 2 c1) / (x(Q)^2 - 2 x(P) x(Q) + x(P)^2)$

(%o13) $C - (2 \sqrt{y(P) - a1 x(P)^2 - b1 x(P) - c1} x(Q) + 2 x(P) \sqrt{y(P) - a1 x(P)^2 - b1 x(P) - c1}) \sqrt{y(Q) - a1 x(Q)^2 - b1 x(Q) - c1} - 2 x(P) y(Q) - (-2 a1 x(P) - b1) x(Q)^2 - (2 y(P) - 2 a1 x(P)^2 - 2 b1 x(P) - 2 c1) x(Q) + b1 x(P)^2 + 2 c1 x(P)) / (x(Q)^2 - 2 x(P) x(Q) + x(P)^2)$

Et l'expression c_{21} , plus complexe :

(%o14) $(x(P)^2 y(Q)^2 + \sqrt{y(Q) - a1 x(Q)^2 - b1 x(Q) - c1} C (2 x(P) \sqrt{y(P) - a1 x(P)^2 - b1 x(P) - c1} x(Q) + 2 x(P)^2 \sqrt{y(P) - a1 x(P)^2 - b1 x(P) - c1}) y(Q) - 2 a1 x(P) \sqrt{y(P) - a1 x(P)^2 - b1 x(P) - c1} x(Q)^3 + \sqrt{y(P) - a1 x(P)^2 - b1 x(P) - c1} (2 y(P) - 4 a1 x(P)^2 - 4 b1 x(P)) x(Q)^2 + \sqrt{y(P) - a1 x(P)^2 - b1 x(P) - c1} (2 x(P) y(P) - 2 a1 x(P)^3 - 4 b1 x(P)^2 - 8 c1 x(P)) x(Q)) + C (y(P) - 3 a1 x(P)^2 - b1 x(P)) x(Q)^2 + (4 x(P) y(P) - 4 a1 x(P)^3 - 6 b1 x(P)^2 - 6 c1 x(P)) x(Q) + x(P)^2 y(P) - a1 x(P)^4 - b1 x(P)^3 - 2 c1 x(P)^2) y(Q) + (-a1 y(P) + 2 a1^2 x(P)^2 + a1 b1 x(P)) x(Q)^4 + ((-4 a1 x(P) - b1) y(P) + 4 a1^2 x(P)^3 + 7 a1 b1 x(P)^2 + (6 a1 c1 + b1^2) x(P)) x(Q)^3 + (y(P)^2 + (-3 a1 x(P)^2 - 6 b1 x(P) - 2 c1) y(P) + 2 a1^2 x(P)^4 + 7 a1 b1 x(P)^3 + (4 a1 c1 + 6 b1^2) x(P)^2 + 8 b1 c1 x(P)) x(Q)^2 + ((-b1 x(P)^2 - 6 c1 x(P)) y(P) + a1 b1 x(P)^4 + (6 a1 c1 + b1^2) x(P)^3 + 8 b1 c1 x(P)^2 + 8 c1^2 x(P)) x(Q)) / (C2 \sqrt{y(P) - a1 x(P)^2 - b1 x(P) - c1} x(Q)^2 - 4 x(P) \sqrt{y(P) - a1 x(P)^2 - b1 x(P) - c1} x(Q) + 2 x(P)^2 \sqrt{y(P) - a1 x(P)^2 - b1 x(P) - c1} \sqrt{y(Q) - a1 x(Q)^2 - b1 x(Q) - c1} + (x(Q)^2 - 2 x(P) x(Q) + x(P)^2) y(Q) - a1 x(Q)^4 + (2 a1 x(P) - b1) x(Q)^3 + (y(P) - 2 a1 x(P)^2 + b1 x(P) - 2 c1) x(Q)^2 + (-2 x(P) y(P) + 2 a1 x(P)^3 + b1 x(P)^2 + 4 c1 x(P)) x(Q) + x(P)^2 y(P) - a1 x(P)^4 - b1 x(P)^3 - 2 c1 x(P)^2)$

Les expressions

$$\sqrt{y(Q) - a_1x(Q)^2 - b_1x(Q) - c_1}$$

et $\sqrt{y(P) - a_1x(P)^2 - b_1x(P) - c_1}$

peuvent avoir leurs radicandes négatifs même quand il y a des solutions. En analysant les expressions, on s'aperçoit que n'intervient en fait, toujours, que le produit des deux. Ce produit est égal à $(f_1(x_Q) - y_Q)(f_1(x_P) - y_P)$. Il est positif si et seulement si les deux points P et Q sont tous les deux à l'extérieur ou tous les deux à l'intérieur de la première parabole, associée à f_1 . C'est topologiquement équivalent au fait qu'il peut y avoir — et donc qu'il y a d'après les calculs — des solutions pour deux paraboles tangentes. En notant :

$$s_{PQ} = \sqrt{(f_1(x_Q) - y_Q)(f_1(x_P) - y_P)},$$

$$Den_{a_2} = (x(Q) - x(P))^2 \text{ et}$$

$$Num_{a_2} = y(Q) - x(Q)(2a_1x(P) + b_1) + y(P) - b_1x(P) - 2c_1,$$

les deux solutions pour a_2 s'expriment ainsi :

$$a_{21} = \frac{2s_{PQ} + Num_{a_2}}{Den_{a_2}}$$

$$a_{22} = \frac{-2s_{PQ} + Num_{a_2}}{Den_{a_2}}$$

On ferait de même — mais c'est bien plus long, on ne le détaillera pas ici — pour b_{21}, b_{22} et c_{21}, c_{22} . Par exemple pour le dénominateur des deux coefficients c_2 , en notant

$$Den_{c_2} = y(P) + y(Q) - a_1(x(P)^2 + x(Q)^2) - b_1(x(P) + x(Q)) - 2c_1,$$

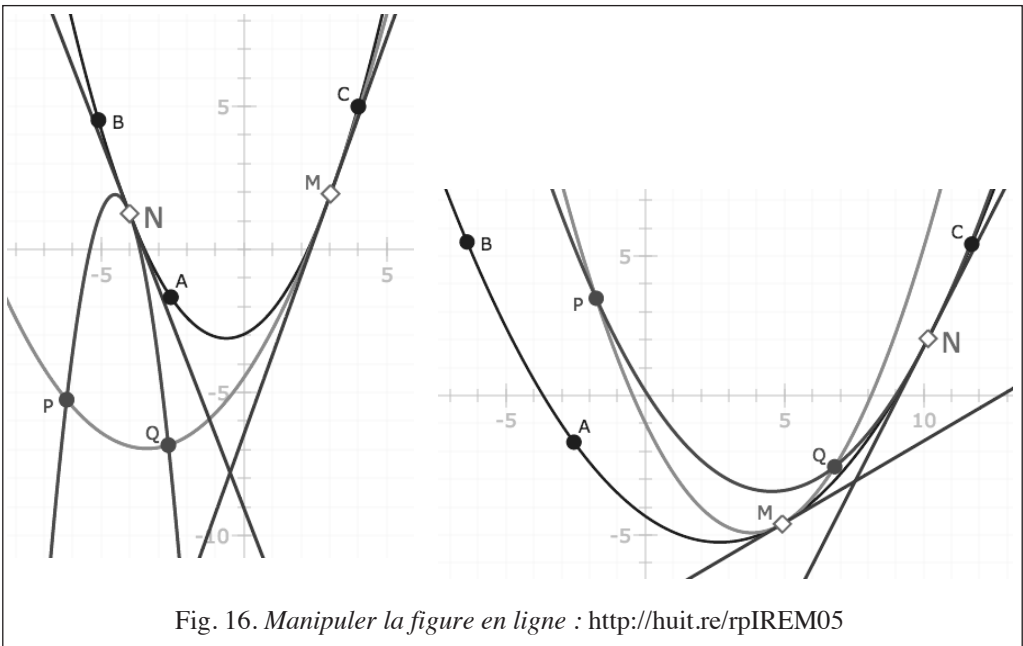


Fig. 16. Manipuler la figure en ligne : <http://huit.re/rpIREM05>

les dénominateurs de c_{21} et c_{22} s'écrivent :

$$Den_{c_{21}} = Den_{a_2}(2s_{PQ} + Den_{c_2})$$

et

$$Den_{c_{22}} = Den_{a_2}(2s_{PQ} - Den_{c_2})$$

Cette recherche d'optimisation par des calculs intermédiaires, si elle est toujours présente dans toute activité algorithmique dès qu'il y a une interface de sortie dynamique, est bien, dans le cadre de l'enseignement, un travail dans cette circulation entre une démarche théorique et la simulation dynamique.

5. 3. c Retour à l'approche par curseurs (voir figure 17)

Un lecteur attentif aura ressenti que ce paragraphe 5.3. a été quelque peu scénarisé, au sens où chacun a déjà pu se dire qu'avec les curseurs, on peut tout à fait avoir aussi deux solutions : à partir de $\Delta = 0$, il suffit de chercher le coefficient b_2 en fonction des cinq autres. Mais, bien entendu, cela reste beaucoup moins général que le cas précédent car pour la seconde parabole, si on dispose de deux valeurs pour b_2 , il y a une seule valeur pour a_2 (curseur) et pour c_2 (autre curseur).

On notera une propriété spécifique de cette situation : dans ce cas les deux tangentes aux deux solutions se coupent sur l'axe des ordonnées. On pourrait le vérifier par calcul, mais c'est une conséquence d'une propriété des paraboles (voir figure 18) :

Les tangentes en M et N à une parabole se coupent en un point T. Soit I le milieu de [MN]. Alors la droite (IT) est la direction de l'axe de la parabole (et le milieu de [IT]) est un point de la parabole dont la tangente en ce point est parallèle à (MN), mais cela ne sert pas ici). Dans notre contexte, puisque

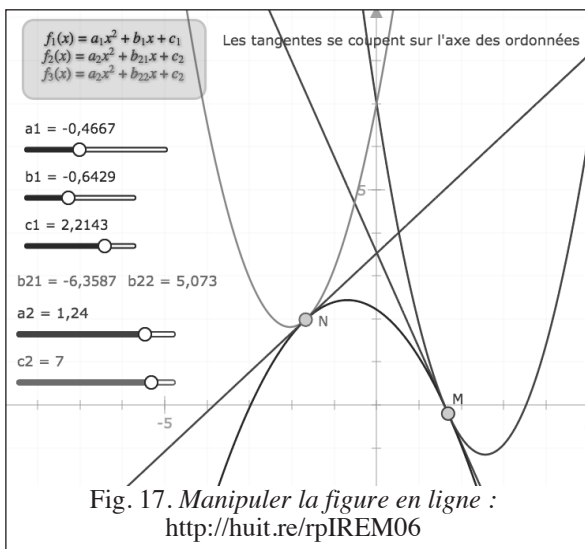


Fig. 17. Manipuler la figure en ligne : <http://huit.re/rpIREM06>

$x(M)$ et $x(N)$ sont opposés, le milieu de [MN] est sur l'axe des ordonnées. Comme l'axe des paraboles est parallèle à cet axe, les tangentes en M et N (de la parabole associée à f_1) se coupent nécessairement sur l'axe des ordonnées.

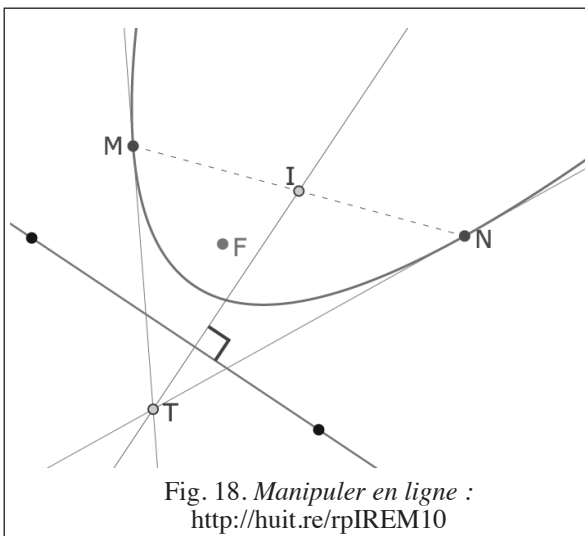


Fig. 18. Manipuler en ligne : <http://huit.re/rpIREM10>

Conclusion

Il y a de nombreuses approches possibles pour analyser le passage des mathématiques théoriques telles qu'elles sont enseignées jusqu'en L3 et évaluées aux écrits des concours à des mathématiques où la mise en œuvre d'illustrations par la simulation participe, assez systématiquement, du processus de conceptualisation des apprenants, évaluées, elles, aux oraux des concours. L'approche développée ici est centrée sur — et donc optimisée pour — la qualité de la pratique des TICE en formation initiale des futurs enseignants en intégrant en particulier le glissement de paradigmes — qui se joue en général dans la société — dans sa reprise curriculaire institutionnelle.

En proposant de faire vivre la pratique mathématique des étudiants plongée dans un monde où les dimensions théoriques n'ont plus la même pertinence, cette intégration renforce la qualité de la pratique des TICE, et par là même la consolide. Elle se fait, sur des activités choisies à cet effet, essentiellement par un questionnement - verbalisation des pratiques - pour une conscientisation régulière des enjeux mathématiques dans les choix de simulation. Le thème des tangentes communes à deux paraboles, par les retours du calcul formel, les choix d'interface des paraboles, les cas particuliers rencontrés, est une situation suffisamment riche pour illustrer cette démarche de différentes façons.

Bibliographie

Références historiques

- DOUADY Régine (1984) - *Jeux de cadres et dialectique outil-objet dans l'enseignement des mathématiques*. Thèse d'état, Paris VII (Ed. INRP)
- LABORDE Jean-Marie (1997) - *Projet Cabri-géomètre : conception et réalisation de micromondes de manipulation directe d'objets abstraits*, Grenoble, EIAH, Université Joseph Fourier.
- NANARD Jacqueline (1990) - *La manipulation directe en interface homme-machine*. Thèse d'état, U.S.T., Montpellier.
- SHNEIDERMAN Ben (1982) - *The future on interactive systems and the emergence of direct manipulation*. Behavior and Information Technology, 7 : p. 237-256

Références plus récentes

- ARTIGUE Michèle (2011) - *L'impact curriculaire des technologies sur l'éducation*. XIII CIAEM-IACME.
- LAGRANGE Jean Baptiste (2000) - *Approche didactique et cognitive d'un instrument technologique dans l'enseignement. Le cas du calcul formel en lycée*. Thèse l'habilitation (HDR). Paris VII.
- TROUCHE Luc (2005) - *Construction et conduite des instruments dans les apprentissages mathématiques : nécessité des orchestrations*, Recherche en Didactique des Mathématiques (RDM) 25/1 – p. 91-138.