A PROPOS DE L'INTRODUCTION DES NOMBRES NEGATIFS A L'ECOLE SECONDAIRE [1]

Putois était. Je puis l'affirmer. Il était.
Regardez-y, messieurs, et vous vous assurerez
qu'être n'implique nullement la substance
et ne signifie que le lien de l'attribut au sujet,
n'exprime qu'une relation.
Sans doute, dit Jean Marteau,
mais être sans attributs
c'est être aussi peu que rien.

Anatole France, « Putois »,
in *Œuvres complètes*, t. III, 1991,
Bibliothèque de La Pléiade, p. 751

Souffrez qu'à mon logis j'ajoute encore une aile.

Jean de La Fontaine, « La mort et le mourant »

Jean-Claude PONT

Note préliminaire

Le présent article a trait à des réflexions suscitées par la pratique de l'enseignement des mathématiques au niveau des premiers rudiments de l'algèbre. Unité de lieu : des parties de la Suisse romande, unité de temps : la période 1965-1975, unité de pensée : un cadre conceptuel exprimant une certaine philosophie de l'enseignement des mathématiques. L'un des principes de ce cadre conceptuel recommande de ne pas remplacer l'algébrique des premiers débuts par du géométrique compliqué et hors sujet.

Ces observations préliminaires sont importantes. Elles constituent le domaine de définition de ces réflexions. On évite ainsi des remarques qui relèveraient de l'anachronisme. C'est dire que cet article ne tient pas compte des développements ultérieurs de la pédagogie des mathématiques, en particulier des riches travaux des IREM [2].

Note liminaire

Lorsque j'enseignais dans le système valaisan, la durée du collège s'étendait sur huit années. J'avais ainsi des élèves dont l'âge s'échelonnait de 12 à 20 ans. Il m'a donc été donné d'enseigner les nombres négatifs à des gosses. Cet enseignement m'a confronté à des difficultés que je n'envisageais pas au sortir de mes études et qui m'ont surpris. À la réflexion et tardivement, j'ai réalisé que le

1 Cet article paraît simultanément en version italienne dans *Bollettino dei docenti di matematica*, 70, 201, p. 9-24.

2 Le présent article a beaucoup profité des échanges que j'ai eus avec les relecteurs du comité de rédaction, que je remercie pour leurs conseils avisés.

problème était autant philosophique que mathématique : il concernait le statut ontologique des entités mathématiques. On pensera peut-être : un grand mot pour une petite chose. Voire ! Dans les considérations qui suivent, le départ n'est pas toujours visible entre celles qui s'adressent exclusivement au maître et celles qui peuvent ou doivent transiter vers l'élève. Quand on enseigne les mathématiques, toute vérité n'est pas bonne à dire (il n'y a pas de point ou de droites dans la nature, les axiomes ne sont pas des vérités évidentes par elles-mêmes, etc.) ! Mais, quoi qu'il en soit, il me paraît souhaitable que l'enseignant en sache plus que ses élèves.

Sur le plan de l'article

Le plan du présent article aurait pu suivre l'ordre chronologique dans lequel ces réflexions ont évolué : blocage des élèves devant l'effraction que constitue l'entrée des nombres négatifs dans le royaume du nombre, perplexité de l'enseignant, dont on peut souhaiter qu'il aimerait savoir de quoi il parle, un enseignant soucieux de justification intellectuelle. Donc problème pédagogique.

En appeler à la philosophie et à l'histoire des mathématiques est naturel :

— La Philosophie, en vue d'obtenir un éclairage sur le statut ontologique de ces entités, sur leur nature, sur leur mode d'être. On s'inscrit alors dans les problèmes ordinaires de la métaphysique, avec ses questionnements sur l'être. Il s'agit de dire ce que sont les nouveaux venus, en les rattachant à un ensemble d'objets déjà reconnus et dont les modes d'être appartiennent à une mathématique familière.

— L'Histoire, pour les errements qu'elle révèle chez ceux qui eurent la mission de donner droit de cité à ces entités, par l'usage qu'ils en faisaient, l'enseignement qu'ils leur consacraient, les métaphores qu'ils imaginaient pour leur donner des apparences de réalité.

Pourtant, la rigueur de la chronologie s'applique mal aux nuances de la pensée. Le plan que j'ai retenu, s'il intègre bien les éléments évoqués à l'instant, les accommode d'une manière souple, de façon à épouser au mieux ces nuances. Les buts que je me fixais ont évolué au cours de la rédaction. Il s'agissait initialement de réflexions autour du premier enseignement des nombres négatifs. Les expériences vécues au cours de mes années passées dans l'enseignement secondaire devaient en former le socle. Les travaux en histoire et philosophie des mathématiques, auxquels je me suis adonné par la suite, m'ont engagé à prolonger ces réflexions, en les plongeant dans le contexte historique et philosophique sur lequel elles s'inscrivent, un contexte tout en mouvements complexes.

Remarques sur le travail de l'historien

Lorsque l'historien rapporte sur la découverte de concepts et d'idées, il doit rendre compte de leur nouveauté. Par la rumeur ou par l'enseignement, ils sont passés dans le domaine public, au point qu'ils semblent aller de soi. Comment faire revivre la stupéfaction qu'ils ont produite, la charge de nouveauté qu'ils transportaient ? L'inconnu d'hier et devenu banal, on ne pense plus sans lui. Si d'aventure on nous questionnait à leur sujet, nous serions pris au dépourvu, car ces concepts et ces idées nous paraissent tenir au fond même de la raison et appartenir au bagage de l'espèce. En bref, il faut une bonne connaissance de l'époque où parurent ces concepts et ces idées pour mesurer à quel point nos prédécesseurs ont été intelligents, et courageux ! Nous avons l'habitude – mauvaise – d'examiner, de décrire, de penser une œuvre, la production d'un temps, depuis l'aval, avec notre esprit chargé de ce que le fleuve a charrié depuis. Je me livre ici à une présentation qui, au contraire, se porte en amont ; ce qui est sans doute plus difficile, moins confortable et plus risqué. Avant d'entrer dans le vif du sujet, je propose donc un flash sur les révolutions conceptuelles qui ont accompagné la marche des mathématiques aux XVIIème et XVIIIème siècles.

Ruptures épistémologiques
et autres révolutions conceptuelles

Je rappelle d'abord l'incapacité où se sont trouvés les anciens Grecs d'inventer quelque chose qui ressemble à notre calcul littéral. Il y a une cinquantaine d'années, réfléchissant à la question, j'avais formulé une conjecture simple et plausible (je l'ai retrouvée plus tard chez Abel Rey) : les signes utilisés par les Grecs dans leur numération étant des lettres de l'alphabet, comment auraient-ils envisagé le recours à des lettres pour un calcul littéral ? Van der Waerden, à qui j'avais soumis l'hypothèse, avait eu cette jolie réponse : « Les Grecs étaient bien trop intelligents pour cela ! » Je crois aujourd'hui que la pensée d'un signe ne représentant rien de particulier, vide de *Bedeutung*, des formes sans matière, aurait horrifié les anciens Grecs ; il leur fallait la garantie fournie par l'or en banque. Dans cette hypothèse, ce serait donc l'exigence de l'être comme support du signe qui les aurait empêchés de réaliser cette découverte capitale. C'est vraisemblablement aussi la raison pour laquelle leur arithmétique (au sens de la théorie des nombres), celle que l'on trouve dans les livres VII à IX des *Éléments* d'Euclide, est complètement plongée dans la géométrie. Une situation de blocage comparable s'est d'ailleurs produite dans les années 1830 en Grande Bretagne [3] : pour une raison voisine, les géomètres britanniques n'ont pas su développer une algèbre symbolique qu'ils avaient si bien inventée. Pour y parvenir, on devait être dépourvu du scrupule métaphysique.

Sur la géométrie grecque aux exigences ontologiques tacites mais strictes, se greffe une pensée plus libre. C'est celle des errants de la Renaissance (bénéficiant eux-mêmes, probablement, des mouvements intellectuels divers dont ils sont les héritiers), qui ont de l'audace intellectuelle et jouent librement avec le matériau fourni par la pensée grecque, en se dégageant des présupposés métaphysiques qui y étaient à l'œuvre. Pour paraphraser le Bachelard du *Rationalisme appliqué* (p. 81), nous sommes dans des moments de l'histoire où le penseur n'est plus déterminé par un destin venu des origines, quand « plus rien ne monte des profondeurs ».

A partir des années 1550, on voit surgir une armada d'entités, de concepts et de notations, d'où sortira la mathématique classique [4]. Le premier XVIIème, outre par l'éclosion du calcul littéral, est marqué par l'apparition, sans bruit, de processus infinitaires dans des situations où les Anciens recouraient à la périlleuse exhaustion (rectification, aire, volume). Cette double série de mutations surgit sur un fond philosophique en contravention avec les interdits mentionnés à l'instant. Les interdits anciens sont morts, la Géométrie peut se faire Mathématique ! Est-

3 Jean-Claude Pont, « Les symboles mathématiques, signes du Ciel », in (dir.) Jean-Yves Béziau, *La pointure du symbole*, Éditions Petra, Paris, 2014, p. 337. A propos de la « situation de blocage » dont il s'agit ici, je donne après les annexes un extrait (légèrement remanié) de ma contribution à ce livre (§ 6. « Le paradigme de l'être et du signe »). Il s'agit d'exemples qui illustrent bien de telles situations.
4 Le *Triparty en la science des nombres*, que Nicolas Chuquet termine en 1484, anticipe d'un siècle sur des travaux de la fin du XVIe siècle, commencement du XVIIe siècle en lesquels il est de coutume de voir les débuts de l'algèbre, disons classique. Bien en avance sur son temps – trop en avance ? – ce remarquable ouvrage de Chuquet n'aura pourtant pas joué le rôle qu'on en aurait pu attendre. J'en donne en annexe 1 quelques extraits sommaires, empruntés à l'ouvrage que lui a consacré Maryvonne Spiesser.

ce un hasard si le centre de gravité temporel de ces ruptures, 1610-1630, et le moment où la physique se libère du carcan de la pensée ancienne, coïncident ?

Je m'attarde sur le calcul littéral, expression que j'entends dans un sens large : calcul avec les lettres, notations nouvelles, nouvelles familles de nombres (négatifs et complexes). Les uns et les autres apparaissent à peu près en même temps et ils collaboreront étroitement au développement de ce que l'on pourrait appeler la mathématique classique. Je m'y attarde parce que le calcul littéral est l'agent caché, le *deus ex machina*, de toute l'évolution future en mathématiques. Mais la simplicité que nous y voyons aujourd'hui, du fait d'un très long commerce, nous empêche de réaliser à quel point *cette écriture qui pense pour nous* n'était pas naturelle, et même s'opposait aux canons de l'épistémologie ancienne. L'avènement du calcul littéral a constitué une révolution conceptuelle parmi les plus importantes de celles que la science a vécues dans les temps modernes, une révolution anonyme et silencieuse.

A la lecture de l'ouvrage de Florian Cajori [5] – un Tessinois – on est effaré devant ce que l'imagination a produit pour le résultat que nous savons. On pense à l'histoire de la vie, où l'on voit la nature bricolant sans plan ni projet, essayant toutes les voies, raturant ici, reprenant ailleurs, abandonnant, sans loi ni méthode, laissant au plus robuste la possibilité de survivre et de procréer. L'histoire des notations est remplie *d'espèces perdues*. Foisonnante et exotique, à l'image de celle du vivant, c'est une histoire édifiante et qui éclaire d'un regard neuf des aspects de la pédagogie des mathématiques.

Dans la jungle de ces notations, on observe une longue période que je qualifierai de « sténographique ». Le signe n'a d'autres vertus que sténographiques, il s'agit de simplifier le discours en remplaçant des termes répétitifs par des signes (signes d'opérations, signe d'égalité, etc.) (voir annexe 1). Puis viennent des moments décisifs. L'idée de représenter les diverses puissances de la grandeur inconnue par une même lettre, affectée d'un nombre – peu importe qu'on le place en haut à droite, tout a été essayé – qui indique le nombre des occurrences de l'inconnue dans un produit ; solidaire de cette invention, la règle d'addition des exposants, qui est à l'origine de la nature dynamique du calcul littéral. L'audacieux amalgame de l'être et de ses diverses puissances sous un nom unique est d'une force que les fondateurs (entre autres Viète et Descartes) ne semblent pas avoir soupçonnée. Certes les x, x^2, x^3 sont encore associés dans la pensée à quelque chose de géométrique, ainsi que le prouve leur nom : carré, cube. Mais l'esprit s'habitue à faire fond sur le signe seul, comme le jeune oiseau qui volette autour du nid avant de prendre son essor. Une autre libération survient quand, coup d'audace, on se hasarde – ce que suggère naturellement la nouvelle écriture – à transcender l'interdit géométrique en laissant la bride sur le cou à l'exposant. Enfin, la lettre et son exposant s'établissent en plein ciel, les amarres sont rompues.

La représentation d'une inconnue par une lettre constitue la première entorse, encore innocente, au vieux principe, inexprimé mais efficient, des Anciens, la présence d'un référant ou d'un être derrière le signe. Vient ensuite – il n'y a que le premier pas qui coûte - la représentation d'une grandeur connue au moyen d'une lettre, ce qui paraît de prime abord saugrenu.

Le calcul littéral n'est donc plus simplement une technique, sténographique et passive. Son

5 Florian Cajori, *A History of mathematical Notations*, 2 vol., Open Court Pub. Co., La Salle,1928-1929. Publié en un volume par Dover Publications, Inc, New York, 1993.

usage est porté par une épistémologie implicite qui est révolutionnaire au XVIIe siècle : nul besoin de garant réaliste pour supporter le symbole, nul besoin de cette grandeur à consonance géométrique qui sous-tendait la pensée grecque. La double rupture – calcul littéral et processus infinitaires - entraînera des conséquences majeures : l'apparition de l'équation comme entité autonome et objectivée et celle du polynôme, puis de la série, de la fonction, tous objets qui ne pouvaient se penser en dehors des signes nouveaux qui les produisent ; le signe a bel et bien créé de l'être !

On reconnaît que ces ruptures ont une composante métaphysique (c'est peut-être en cela qu'elles sont conceptuelles). Elles ne sont pas indépendantes les unes des autres, et s'associent pour donner le jour à une pensée mathématique nouvelle, qui est encore la nôtre.

Le statut ontologique des entités mathématiques. Les Grundlagen *de Hilbert*

« Ihre neuen geometrischen Abhandlungen habe ich mit großem Interesse gelesen. Sie haben da ein unermeßliches Feld mathematischer Forschung erschlossen, welches als « Mathematik der Axiome » bezeichnet werden könnte und weit über das Gebiet der Geometrie hinauszeichnet. » (Lettre d'Adolf Hurwitz à Hilbert du 8.06.1903, citée dans M.-M Tœpell, *Über die Entstehung von David Hilberts « Grundlagen der Geometrie »*, p. 257) [6]

Le statut ontologique des indéfinissables de la géométrie (point, droite, plan) s'est grandement clarifié à partir des *Grundlagen der Geometrie* de David Hilbert (1900). Hilbert (1862-1943) y répond notamment à des questions débattues tout au long de l'histoire de la Géométrie : qu'est-ce qu'un point, qu'est-ce qu'une droite, quelle est la nature des axiomes, quelle est leur valeur de vérité, etc. ? (Voir aussi annexe 2)

Bien que centrées sur la géométrie, les considérations des *Grundlagen*, à mi-distance entre les mathématiques et la philosophie, jettent un éclairage nouveau sur la nature et la structure des entités mathématiques, un éclairage qui se propage de proche en proche sur l'ensemble du monde mathématique, en particulier sur le domaine des nombres. Certes, il s'agit en partie d'une réponse philosophique, dont l'acceptation ou le rejet dépend à son tour du profil philosophique du mathématicien. Le rejet peut d'ailleurs aller jusqu'à l'horreur chez un platonicien de stricte obédience.

Il convient de préciser que les tentatives entreprises par les générations successives, à commencer par Euclide lui-même, pour définir les entités fondamentales de la Géométrie, ont échoué. Et comment aurait-il pu en être autrement ? Un instant de réflexion montre qu'une définition est constituée de mots et que ces mots doivent à leur tour être définis ; et que l'on n'échappe pas à la régression à l'infini, comme l'a si bien vu Blaise Pascal (1623-1662), mais sans en tirer toutes les conséquences (voir annexe 3).

L'esprit de la révolution hilbertienne est tout entier contenu dans la phrase par laquelle commencent les *Grundlagen* : « Wir denken drei verschiedene Systeme von Dingen : die Dinge des ersten Systems nennen wir *Punkte* (…) » (« Nous pensons trois différents systèmes de choses : les choses du premier système nous les nommons *point* (…). » Le changement de perspective par rapport à la

6 « J'ai lu avec grand intérêt vos nouveaux traités. Vous avez ouvert là un champ immense de recherche mathématique, que l'on pourrait désigner par « Mathématique des axiomes » et qui renvoie loin au-delà de la géométrie ».

tradition est radical. Les entités ainsi mises en scène (on ne peut même pas parler de « définition ») sont dépourvues de toute qualité, tout juste des souffles de voix. Il s'agit donc de leur donner du corps. C'est là le rôle des axiomes. Les axiomes se chargent de fournir un sens ; mais le mot « sens » est peut-être même trop fort. Disons plutôt que les axiomes animent des entités et nous permettent de les mobiliser. Le point et la droite sont définis *implicitement* par les propositions qu'ils sont sensés satisfaire. Tous les termes courants de la Géométrie, comme « situé sur », « situé entre », « être congruent à », etc. sont ainsi (re)définis, l'intuition étant complètement bannie. Il est certain que cette approche nouvelle de la Géométrie n'est rendue possible que par le passé de cette dernière, dans lequel figures et autres intuitions dirigeaient et animaient la manœuvre.

L'approche hilbertienne, dont la nécessité est apparue avec l'avènement de la géométrie non euclidienne, permet de sécuriser les fondements de la Géométrie qui, rassurée, peut reprendre son cours normal. Le jeu axiomatique hilbertien n'avait pas d'autre but que celui-là. Mais l'habitude prise à cette occasion se répercuta de proche en proche sur l'ensemble de la pensée mathématique. Comme le disait excellemment Gaston Bachelard[7] : « On peut déjà se rendre compte que le *rôle* des entités prime leur *nature* et que l'essence est contemporaine de la relation. » Pour préciser cette déclaration, qui demande une certaine pratique du parler philosophique, disons que ce par quoi une chose est ce qu'elle est ne tient pas à une existence qui serait indépendante du sujet connaissant, mais que la chose dont il s'agit devient effective à travers des relations qu'elle est censée vérifier.

7 *Le nouvel esprit scientifique*, PUF, Paris, 1963, p. 22. Edition originale 1934.

Une approche nouvelle des fondements de la géométrie apparaît aussi, dans la même décennie 1890-1900, chez les géomètres italiens, groupés symboliquement autour de Giuseppe Peano, leur leader naturel. Les travaux des Italiens sont, dans leur ensemble, plus riches que ceux de Hilbert. Mais l'absence de coordination et une grande dispersion n'ont pas aidé à la reconnaissance d'une œuvre, plus que méritoire. Il est vrai aussi que les *Grundlagen* sont marqués au coin du génie. Au demeurant, on ne prête qu'aux riches ![8] C'est le même Peano (1889-1932) qui pourvoira l'arithmétique en axiomes.

Le nombre négatif chez quelques auteurs. Exemples historiques

Euler (1707-1783)

La méthode la plus probante pour mesurer l'amplitude des bouleversements occasionnés par l'apparition d'entités nouvelles consiste à interroger les mathématiciens et les enseignants qui eurent commerce avec elles, dans la période qui a précédé leur clarification définitive. Pour les nombres négatifs, qui nous intéressent ici, ce sont les XVIIIème et XIXème siècles. Dans ce paragraphe, j'ai réuni différents auteurs qui servent ce dessein. Les mathématiciens du XVIIIème siècle, Euler en tête, héritent d'un ensemble hétéroclite d'objets et d'outils, dont personne ne sait ce qu'ils sont, de règles qui semblent sorties du chapeau de perlimpinpin et que nul ne sait justifier (Euler a appris les mathématiques dans un ouvrage de Christoph Rudolff publié en 1525, une période où l'algèbre en notre sens est encore à créer).

8 Pour cette question, voir : Jean-Claude Pont, 2014, plus particulièrement p. 340-350.

Euler en est, pour plusieurs raisons, un exemple privilégié. Son impérissable gloire concerne les mathématiques supérieures. Dans notre cas, il s'agit d'une partie moins aboutie, où l'on voit à l'œuvre une pensée tâtonnante, qui se fraye un chemin en terre inconnue. Ce choix a ceci de saugrenu que l'on utilise un grand homme pour montrer les balbutiements d'une pensée en marche. C'est l'histoire d'une lente digestion qui s'opère dans les profondeurs du temps. On peut comparer ce phénomène à celui de la transformation de la nourriture dans le corps d'un animal. Elle se présente d'abord sous un conditionnement informe ; différentes substances non assimilables y adhèrent, il faut séparer le bon grain de l'ivraie. Quant au bon grain, il doit encore être apprêté, conditionné, broyé, malaxé, dissout avant de passer dans le sang et de nourrir l'individu. Tout cela finit par adhérer si intimement à son fond propre, que nul n'est en mesure de savoir de quelle nourriture viennent les composants de tel tissu. Euler est, disais-je, un exemple privilégié pour notre cause :

— Il a composé des manuels destinés à la formation d'un public large ; quand on rédige un manuel, on ne peut guère se contenter de la quiétude de son esprit, ou d'intuitions plus ou moins sommaires et rapides, qui assurent la sécurité minimale des règles régissant la vie des objets fondamentaux. Ils sont fraîchement issus du néant, il s'agit de les intégrer à la communauté mathématique et, pour cela, de les vêtir d'un habit respectable, qui ne fasse pas tache.

— Euler est un auteur d'une grande probité. Il explique avec force détails la voie qu'il a suivie, les tentatives avortées, les fourvoiements, les erreurs à éviter.

— Que l'un des plus grands mathématiciens de l'histoire trébuche sur des notions élémentaires interpelle et demande que l'on s'y arrête.

La *Vollständige Anleitung zur Algebra*[9], qu'Euler publie en 1765 en allemand, constitue l'un des traités les plus anciens qui se proposent de donner à l'algèbre des bases solides ; on y trouve une présentation détaillée des nombres négatifs. Les citations suivantes montrent l'embarras d'Euler. Notons d'abord l'importance qu'il attache à cette clarification : (21, p. 21) « Cette notion de grandeurs niées ou négatives est à considérer soigneusement car elle est de la plus grande importance dans toute l'algèbre. » L'indigence (de notre point de vue actuel) des deux citations qui viennent est révélatrice du même embarras :

> (18, p. 20) « Comme les nombres négatifs peuvent être considérés comme des dettes, pour autant que les nombres positifs indiquent une réelle possession, on peut dire que les nombres négatifs sont moins que rien. »

> (19, p. 20) « De la même manière que les nombres positifs sont incontestablement plus grands que rien, les nombres négatifs sont plus petits que rien. »

L'embarras d'Euler est visible aussi dans le passage sur la règle des signes. Sa justification du cas « moins par moins égal plus » est déroutante, mais édifiante :

> (33, p. 24) « Il reste alors encore à déterminer le cas, où l'on multiplie, par exemple – a par – b. Il est d'abord clair que le produit, pour ce qui concerne les lettres, sera ab. Qu'il faille mettre le signe + ou le signe – est encore incertain. Il est pour autant sûr que cela doit être l'un ou l'autre. Je dis alors que ce ne peut pas être le signe –. En effet, comme – a mul-

9 Je traduits (le plus littéralement possible) le texte d'Euler à partir de l'édition allemande de 1942 (Verlag von Philipp Reclam jun. Leipzig).

tiplié par + b donne – ab, – a multiplié par – b ne peut pas donner la même chose que – a multiplié par + b ; mais c'est le contraire qui doit résulter, qui est + ab. »

La règle des signes a été le chemin de croix dans l'enseignement des mathématiques. Les meilleurs s'y sont essayé aux XVIIIème et XIXème siècle, mais rien de satisfaisant n'en est sorti (voir aussi annexe 1).

Henri Beyle, dit Stendhal (1783-1842)

Henri Beyle, dit Stendhal, a été élève à l'École centrale de Grenoble (aujourd'hui « Lycée Stendhal »). Dans le tome 2 de son ouvrage autobiographique *Vie de Henri Brulard* (écrit en 1835-1836 et publié en 1890), il nous livre des souvenirs de jeunesse. Après avoir indiqué qu'il aimait d'autant plus les mathématiques qu'il méprisait davantage ses maîtres MM. Dupuy et Chabert, il confie quelques souvenirs relatifs à son apprentissage de cette discipline. Les commentaires me semblent superflus :

(p. 56-57) « Suivant moi, l'hypocrisie était impossible en mathématiques et, dans ma simplicité juvénile, je pensais qu'il en était ainsi dans toutes les sciences où j'avais ouï dire qu'elles s'appliquaient. Que devins-je quand je m'aperçus que personne ne pouvait m'expliquer comment il se faisait que : moins par moins donne plus (– x – = +) ? (C'est une des bases fondamentales de la science qu'on appelle *algèbre*).

« On faisait bien pis que ne pas m'expliquer cette difficulté (qui sans doute est explicable car elle conduit à la vérité), on me l'expliquait par des raisons évidemment peu claires pour ceux qui me les présentaient. M. Chabert pressé par moi, s'embarrassait, répétait sa *leçon*, celle précisément contre laquelle je faisais des objections, et finissait par avoir l'air de me dire : «Mais c'est l'usage, tout le monde admet cette explication. Euler et Lagrange, qui apparemment valaient autant que vous, l'ont bien admise». »

(p. 58) « Je me rappelle distinctement que, quand je parlais de ma difficulté de moins par moins à un fort, il me riait au nez (…).

« Je fus longtemps à me convaincre que mon objection sur – x – = + ne pourrait pas absolument entrer dans la tête de M. Chabert, que M. Dupuy n'y répondait jamais que par un sourire de hauteur, et que les forts auxquels je faisais des questions se moqueraient toujours de moi. J'en fus réduit à ce que je me dis encore aujourd'hui : il faut bien que – par – donne + soit vrai, puisque évidemment, en employant à chaque instant cette règle dans le calcul, on arrive à des résultats vrais et indubitables. »

Jean-Victor Poncelet (1788-1867)

En son fameux *Traité des propriétés projectives des figures* de 1822, Jean-Victor Poncelet écrit (p. XX) :

« L'Algèbre emploie des signes abstraits, elle représente les grandeurs absolues [le contexte permet de comprendre le sens du mot « absolu » : il s'agit de ce qui était tenu pour réel, soit ce que nous appellerions les nombres positifs] par des caractères qui n'ont aucune valeur par eux-mêmes, et qui laissent à ces grandeurs toute l'indétermination possible ; par suite elle opère et raisonne forcément sur les êtres de non existence comme sur des quantités toujours absolues, toujours réelles : a et b, par exemple, représentant deux quantités quelconques, il est impossible, dans le cours des calculs, de se rappeler et de reconnaître quel est l'ordre de leurs grandeurs numériques ; l'on est, malgré soi, entraîné à raisonner sur les expressions a – b, $\sqrt{a-b}$, etc., comme si c'étaient des quantités toujours absolues et réelles. Le résultat doit donc lui-même participer de cette généralité, et s'étendre à tous les cas possibles, à toutes les valeurs des lettres qui y entrent ; de là aussi ces formes extraordinaires, ces êtres de raison, qui semblent l'apanage exclusif de l'Algèbre. »

Ce texte est riche d'enseignement. J'attire l'attention sur le redoublement - pléonastique dans l'esprit de l'auteur, mais d'un pléonasme pédagogique - « d'absolu » et de « réel ». A mon sens, il trahit l'insécurité de Poncelet face à ces entités. Lorsque, à l'occasion d'une explication, on tente de convaincre son interlocuteur, c'est naturellement ainsi que l'on procède : incertain du terme que l'on utilise, et qui relève d'un champ sémantiquement mal circonscrit, on renforce le propos à coup de quasi-synonymes, l'accumulation venant au secours de l'incertitude ontologique (voir dans l'annexe 4, la troisième citation). Mais il y a plus. Dans le passage cité, on note une sorte de hiérarchisation ontologique. D'un côté un champ qui, par les qualificatifs « d'absolu » et de « réel », est fondé sur des « semences de vérité » et autres « vérités innées », pour reprendre des expressions du grand rationalisme métaphysique. De l'autre, celui des productions artificielles ou virtuelles, que des conditions extérieures à la raison la contraignent à envisager, quand bien même ces productions lui seraient contraires. Une raison qui, en fin de compte, s'y adapte et, l'habitude aidant, consent à les accueillir. On peut reprendre une belle image, utilisée par Georges Glaeser à propos des nombres complexes : les résultats qu'ils fournissent « ont été conçus dans le péché ».

Comment ne pas penser ici à l'aphorisme fameux de Leopold Kronecker (1823-1891), tel que l'a rapporté Heinrich Weber[10] :

« Il y a une position, qui émergea particulièrement dans ses années [Kronecker] tardives, peut-être plus dans ses contacts personnels que publiquement ; mais publiquement aussi, il n'a pas renié ses vues, par exemple avec netteté dans le Festschrift pour le jubilé de Zeller.

« En ce qui concerne la rigueur des concepts, il posa les plus grandes exigences et rechercha la pure forme cristalline de la théorie des nombres [i.e du nombre entier], pour ce qui avait droit de cité en mathématiques. Plusieurs d'entre vous se souviennent de sa déclaration, faite en 1886 lors d'un exposé présenté devant la Berliner Naturforscher-Versammlung : ˝ Dieu a fait les nombres entiers, tout le reste est l'œuvre de l'homme ˝. » [11]

Colin Maclaurin (1698-1746)

Dans son *Traité des fluxions* de 1749 (p. 154-155), Colin Maclaurin écrit :

10 Heinrich Weber, « Leopold Kronecker », *Jahresberichte der deutschen Mathematiker Vereinigung*, vol. 2, 1891-1892, p. 19-20.

11 « Es ist ein Standpunkt, der besonders in seinen späteren Jahren hervortrat, vielleicht mehr noch im persönlichen Verkehr als in der Œffentlichkeit ; aber auch öffentlich hat er seine Anschauungen nicht verleugnet und z.B. in der Festschrift zur Zeller's Jubiläum scharf hervorgekehrt.
« In Bezug auf Strenge der Begriffe stellt er die höchsten Anforderungen und sucht alles, was Bürgerrecht in der Mathematik haben soll, in die krystallklare eckige Form der Zahlentheorie zu zwägen. Manche von Ihnen werden sich des Ausspruchs erinnern, den in einem Vortrag bei der Berliner Naturforscher-Versammlung im Jahre 1886 that : ˝Die ganzen Zahlen hat der liebe Gott gemacht, alles andere ist Menschenwerk˝ »

« L'usage du signe négatif, en Algèbre, donne lieu à plusieurs conséquences qu'on a eu d'abord de la peine à admettre, & qui ont souvent donné occasion à des idées qui paroissent n'avoir aucun fondement réel. Ce signe fait voir que la valeur réelle de la quantité représentée, par la lettre qui la suit, doit être soustraite (…). »

Une thèse sur l'histoire des nombres négatifs

André-Jean Glière a soutenu en 2007 une thèse [12] intitulée « *Histoire et épistémologie des nombres négatifs, de d'Alembert à nos jours* ». Cette thèse de Glière impressionne. Elle impressionne déjà par le côté purement quantitatif :

— 17 pages de table des matières, pour un total de 1342 pages ;

— 216 pages d'annexes, présentant (en traduction pour le cas de l'important ouvrage d'Hermann Hankel) des textes peu connus, souvent difficiles à trouver.

L'auteur reconnaît (p. 1) avoir été déconcerté par l'idée, qui lui était suggérée, de se livrer à une étude historique sur « le statut des nombres négatifs ».

L'histoire que rapporte Glière est une belle illustration de mon propos. Les citations foisonnent, montrant que la gestion philosophique et didactique des nombres négatifs a constitué une question épineuse. Elles sont empruntées à des grands noms de l'histoire des mathématiques : d'Alembert, Euler, Cauchy, Lacroix, etc.

L'auteur place d'Alembert au centre de son étude. Ce sont les articles « Équation », « Courbe », mais surtout « Nombre négatif » de l'Encyclopédie dite « de Diderot et d'Alembert » qui retiennent l'attention de Glière. Il a visité de fond en comble ces textes, témoins privilégiés des combats qui se sont déroulés dans le sillage des nombres négatifs, des errements (selon notre point de vue actuel) de la pensée autour d'une question qui nous est si familière.

Au terme d'une longue analyse, Glière met justement en évidence « l'armada de faux » auquel doit recourir d'Alembert, pour masquer son incompréhension des nombres négatifs (p. 65), ce que Glière nomme la « théorie des faux-semblants ».

Dans les *Opuscules mathématiques* de 1761, d'Alembert écrivait, idée que l'on retrouve dans son article de *l'Encyclopédie* : « Qu'il me soit permis de remarquer, combien est fausse l'idée qu'on donne quelquefois des quantités négatives, en disant que ces quantités sont au-dessous de zéro. » Ainsi, deux phares de l'époque, Euler et d'Alembert, ont-ils des points de vue opposés et contradictoires sur le nombre négatif.

A l'article « Négatif » de l'*Encyclopédie,* on lit : « (…) quantités négatives en Algèbre, sont celles qui sont affectées du signe –, & qui sont regardées par plusieurs mathématiciens, comme plus petites que zéro. Cette dernière idée n'est cependant pas juste, comme on le verra dans un moment. »

Sur le problème
de l'enseignement des nombres négatifs

J'ai mentionné, au début du présent article, les difficultés que l'enseignant et ses élèves éprouvent au moment d'aborder les nombres négatifs. S'agissant de notions figurant tout au bas de l'échelle, le substrat est maigre et exsangue pour ce qui regarde les échappatoires en lesquelles l'enseignant pourrait trouver refuge. Je reviendrai sur les diverses fantaisies imaginées par la tradition de la pédagogie mathématique pour confé-

12 J'étais membre du jury de cette thèse, dirigée par Jean Dhombres.

rer un statut admissible à ces entités, que l'esprit rechigne d'abord à élever à la dignité de l'être.

Les enseignants se retranchent souvent, consciemment ou non, derrière le long commerce qu'ils ont eu avec les nombres négatifs, l'habitude étant une seconde nature, comme le dit si bien Aristote dans l'*Éthique à Nicomaque*. Heureusement, il y avait les élèves moins dociles, qui s'accrochaient à leur incompréhension, qui ne faisaient pas semblant d'avoir compris, à la différence des meilleurs autres, qui croyaient avoir compris, alors qu'Ils savaient seulement manipuler ces entités, selon des règles ânonnées. Ce sont ces élèves plus faibles qui, nous poussant dans nos derniers retranchements, nous ont contraint à sortir de notre endormissement pour mettre de l'ordre dans nos idées. Ces tentatives d'explication m'ont fait réaliser que je n'avais pas vraiment compris moi-même. Comme le remarquait Karl Weierstrass (1815-1897) : « Les principales difficultés de l'analyse supérieure viennent précisément d'une présentation floue et pas assez détaillée des notions de base et des opérations arithmétiques. » [13]. Les exemples présentés plus haut le montrent, cette ignorance me plaçait dans une compagnie qui m'honorait. On aurait tort de penser que l'inconfortable aveu concernerait uniquement le lointain passé des pionniers. Il était encore de mise dans les années 1950-1960, comme on le voit dans la jolie citation suivante, de Geoges Glaeser (1918-2002), mathématicien reconnu, alors professeur à l'Université de Strasbourg [14] :

> « Il y a un an, j'aurais été prêt à jurer que ne j'avais jamais rencontré la moindre difficulté avec les nombres relatifs. Aujourd'hui, je situe à un âge voisin de 25 ans mon premier contact avec une preuve complètement formelle de la règle des signes; c'était à l'époque de la parution des premiers tomes de Bourbaki. Et, en écrivant le présent article, je suis allé de surprise en surprise, prenant conscience du grand nombre de finesses de compréhension qui m'avaient échappé auparavant sur ce thème. »

Fictions et autres analogies simplistes

La tradition a trouvé le salut dans des analogies simplistes ou débiles, qui visent à introduire les nombres négatifs au moyen de métaphores fumeuses, qui n'étaient en fait guère plus que de la couille de bouc [15]. C'est pour la multiplication que le bât blesse, et heureusement. En effet sans elle, les justifications « externes » fonctionneraient et le problème de la nature des nombres négatifs se poserait avec une acuité moindre, quand bien même il continuerait, au moins au plan philosophique, à conserver toute sa pertinence.

Au premier rang de ces calembours, la température ou la comptabilité. Ainsi, on multiplie une température de – 4 degrés par une autre de –2 degrés et l'on obtient 8 degrés ; ou une dette de 100 fr par une dette de 20 fr pour obtenir un avoir de 2 000 fr. La droite numérique n'est pas appropriée non plus. Il me semble que pour être bien utilisée, elle présuppose la notion de nombre négatif, qui servira de base à celle de distance négative. Parler du point « – 1 » sur la droite réelle relève du salmigondis. Le point appartient à la géométrie, et on ne sait pas trop ce que c'est que – 1 ; il deviendrait ainsi un nombre, alors qu'en l'occurrence, – 1 serait

13 Cité par Pierre Dugac, « Éléments d'analyse de Karl Weierstrass », *Archive for History of Exact Sciences*, volume 10, 1973, p.41-176, p. 77.

14 Georges Glaeser, « Epistémologie des nombres négatifs », *Recherches en didactique des mathématiques*, vol. 22, 1981, p. 303-346, p. 305. (Voir aussi annexe 3)

15 « Couille de bouc ». Apparemment triviale, l'expression « couille de bouc », qui s'utilisait dans mon jeune temps, est magnifiquement évocatrice. Elle est un exemple vivant de la souplesse et du dynamisme de la langue, qui saisit les situations les plus cocasses pour en tirer des images parlantes (voir www.histoires-etranges.com/bouc.html).

plutôt une distance, mais une distance négative, ça demande à être expliqué …

Ayant critiqué les tentatives que la tradition a imaginées pour rendre concrets les nombres négatifs, je me suis à mon tour essayé à l'exercice. Je n'ai pas pu tester son résultat, n'ayant plus de charge d'enseignement depuis longtemps. La mise en œuvre de cette idée devrait s'effectuer au moyen d'une construction dynamique, appuyée sur une animation vidéo. Dans la description qui suit, j'en donne la substance, sans aucun des éléments graphiques qui devraient (ou pourraient) l'accompagner. La situation de base est celle que l'on voit dans les manuels romands : les propriétés des opérations dans **N** ont été mises en place (commutativité, associativité, distributivité, éléments neutres).

La fiction dont il s'agit concerne un enfant né avec un seul bras, disons le droit, qui est donc « naturel » (« Les entiers sont l'œuvre de Dieu, tout le reste celle de l'homme »). Au cours des années, l'enfant a acquis et développé de nombreuses aptitudes. Grâce aux progrès de la technologie, on est par la suite en mesure de lui offrir une prothèse, qui jouera le rôle d'un bras gauche, un bras par conséquent « artificiel » (« artificiel » se rapporte à l'aphorisme de Kronecker). On s'efforce bien sûr de construire ce bras gauche de manière à ce qu'il apporte au bras droit la complémentarité nécessaire.

On cherche en quelque sorte à mettre en place une isomorphie entre les deux. En transposant l'idée sur le domaine du nombre, on commencerait par le 1 du bras droit (1_d), à qui on ferait correspondre le 1 du bras gauche (1_g), que l'on appellerait « – 1 ». On poursuivrait cette construction « bijective ». Le 1_d est naturel, le 1_g artificiel, etc. Le bras gauche est ainsi construit, mais il est encore dépourvu de fonctionnalités, il est amorphe, on ne peut rien faire avec lui. La deuxième phase voit l'introduction de fonctionnalités (en clair, l'introduction d'opérations qui font intervenir les deux bras) qui, à terme, doivent permettre la collaboration intime des deux bras dans des tâches soit individuelles (par exemple, addition de négatifs), soit communes.

Ici intervient une phase qui, selon moi, justifie à elle seule le recours à une fiction de ce genre. Le constructeur a toute latitude de structurer à sa guise le bras artificiel. (« Das Wesen der Mathematik liegt gerade in ihrer Freiheit » [« L'essence des mathématiques réside précisément dans leur liberté », Cantor, 1883] Il pourrait, par exemple, décider que lorsque le bras droit s'approche du gauche, celui-ci s'en éloigne. Possible, mais sans intérêt, même néfaste pour la collaboration. Non, le constructeur veille à une coordination des actions. Une coordination qui est en un certain sens arbitraire, mais les besoins pratiques vont dicter les choix.

On pourrait dire, par exemple, que des mouvements en sens contraire sont nécessaires pour que l'apport des deux s'additionne. Les mains vont à la rencontre l'une de l'autre elle sont alors en mesure de collaborer [16].

Sur une bonne manière
de présenter les nombres négatifs

Un mot de mon histoire personnelle pour éclairer la suite. J'ai effectué mes études à la Section Mathématiques de l'EPFZ. A l'époque, le premier cours d'analyse était plutôt un cours pour ingénieurs. Cette formation initiale est restée par la même en marge des réformes introduites dans l'après-guerre. Pour prendre un exemple, la topologie générale y était absente en tant que telle. Au troisième semestre seulement, Albert Pflu-

16 Le modèle proposé ici permet d'éclairer des points de l'algèbre élémentaires souvent mal compris. Par exemple lorsqu'on prétend *démontrer la convention* $a^{-n} = 1/ a^n$.

ger, mathématicien renommé, dispensait un cours intitulé « Topologische Raüme », mais la matière qui y était présentée, et qui aurait dû servir de fondement au premier cours d'analyse, en était tout à fait indépendante. Pour les mêmes raisons, Bourbaki n'était pas évoqué durant les deux premières années. Dans la suite, en revanche, une pléiade de mathématiciens de classe mondiale (entre autres Heinz Hopf, Eduard Stiefel ou encore Beno Eckmann ; sans compter les van der Waerden et Rolf Nevanlina, qui enseignaient à l'Université, que l'on gagnait en traversant la petite Karl-Schmid Strasse) assuraient des enseignements de très haut niveau. Mais ceux-ci ne concernaient que de loin les éléments. Aussi, nos premières années dans l'enseignement secondaire faisaient-elles fond sur ce que nous y apprîmes par nous-mêmes. Comme l'écrivait Anatole France en une autre circonstance, cette heureuse ignorance nous obligea à avoir de l'invention !

L'un des bons côtés de cette situation fut l'obligation où nous nous trouvions de repenser les matières enseignées. Saine hygiène mentale pour un enseignant ! Pour faire partager nos réflexions, avec Marc-André Pichard, nous publiâmes un ouvrage traitant de nos idées en la matière (voir Pont,1972). Ce fut l'occasion d'une clarification des bases de certains domaines du premier enseignement de l'algèbre. Le chapitre consacré aux nombres négatifs partait de la définition suivante (p. 115) : « Étant donné un élément a quelconque de N, on crée un nouvel être mathématique, noté – a, défini par l'égalité : a + (– a) = (– a) + a = 0. »

La suite s'enchaîne alors très bien, avec la jolie démonstration de la règle des signes. Nous avons recouru à ces mêmes idées dans deux manuels d'algèbre élémentaire, utilisés dans les établissements secondaires du Valais romand.

J'avais envoyé, avec mes compliments, l'ouvrage à Albert Pfluger. S'en est suivi le message (6. 12. 1972) que voici, qui renforce la remarque de Georges Glaeser (voir plus haut) : « Gerade der erste Teil scheint mir mit grossem Sorgfalt gemacht zu sein. Ein Fragezeichen möchte ich zur Definition auf S. 115 machen. Ich glaube nicht, dass man sagen kann, das Element – a sei durch die Gleichung a + (– a) = 0 definiert, oder doch ? »[17]

Dans une longue étude consacrée aux cours de Weierstrass à Berlin (ici le cours du semestre d'été de 1878, rédaction de Adolf Hurwitz), Pierre Dugac[18] rapporte (p. 82) sur la façon dont Weierstrass envisageait d'introduire les nombres négatifs :

> « Pour pouvoir toujours définir l'opération de soustraction, il [Weierstrass] introduit les éléments « opposés » : étant donné un agrégat, à chaque élément a de l'agrégat, on fait correspondre un nouvel élément a', tel que a + a' = 0. Ces nouveaux éléments a' possèdent la propriété suivante : (a')' = a. »

Cette vision « laïque » des nombres négatifs revient, d'une certaine manière, à reconnaître que tout ce qu'il faut savoir de l'élément – 1 c'est comment calculer avec lui. Dis-moi comment je calcule avec toi et je te dirai qui tu es ![19]

17 « La première partie me paraît avoir été faite avec un grand soin. Je souhaiterais poser une question sur la définition de la p. 115. Je ne crois pas que l'on puisse dire que l'élément – a soit défini par l'équation a + (– a) = 0, ou bien ? »
18 Pierre Dugac, « Eléments d'analyse de Karl Weierstrass », *Archiv for History of Exact Sciences* », Volume 10, Number 1 / 2, 1973, p. 41-176.
19 Je pense ici à ce que disait Gaston Bachelard de l'élément chimique. En tant quel tel, il n'existe que virtuellement. Sa définition est subordonnée aux méthodes de purification qui nous le font connaître.

ANNEXE 1

Je cite ici quelques passages du *Triparty en la science des nombres* de Nicolas Chuquet. La pagination indiquée est celle du bel article que lui a consacré Maryvonne Spiesser[20].

1. (p. 138-139) Dans son *Triparty*, Chuquet ne s'est pas limité aux racines d'indice 3, mais il a ouvert « le sujet avec une définition générale d'une ˝racine de nombre˝ » :

> « Et doit on scavoir qu'ilz sont infinies especes de racines car aulcunes sont racines secondes, aulcunes racines tierces, aulcunes racines quartes, aulcunes quintes et ainsi continuant sans fin. (…)
>
> « Racines premières ne se treuvent point. Et qui icelles vouldroit assigner pour cause de continuacion de ordre il conviendroit dire que racines premieres est entendue pour tous nombres simples (…). »

Maryvonne Spiesser donne quelques exemples montrant la grande habileté de Chuquet à pratiquer avec des expressions irrationnelles complexes. De là son commentaire (p. 139) : « Chuquet est le premier à adopter de véritables notations performantes qui ne sont plus du domaine de l'abréviation. »

2. La règle des signes est présente dans le *Triparty* : « Plus et plus, moins et moins adjoustons. Plus et moins, soustrayons.» (p. 140)

3. A l'image des racines, dont les indices sont en nombre illimité, le degré de l'inconnue dans une équation n'est assujetti à aucune limite. Notre « exposant » est nommé « denominacion ». Ainsi, l'inconnue ou la chose est nommée « premier », le carré de la chose est dit « second », le cube « tiers », la quatrième puissance « quart », etc. (p. 142). Le nombre « pris sans aucune *denominacion* » peut être considéré comme étant affecté de la *denominacion* 0. (p. 143) De surcroît, une *denominacion* peut être négative (p. 147). Cette infinité de possiblités pour l'exposant exclut *ipso facto* la présence de la géométrie. »

Maryvonne Spiesser, que je remercie d'avoir lu attentivement cet article, m'a fait l'intéressante remarque suivante, que je transcris comme telle : Chuquet est très performant dans ses notations puisqu'il peut nommer les puissances de l'inconnue à l'infini, qu'il utilise même les exposants négatifs et donc peut énoncer une règle de produit de deux puissances par addition des exposants qui est parfaite. En revanche, ce qui me frappe c'est que dans sa manière de noter, il n'y a rien qui désigne l'inconnue, pas de c, de x ou de quoi que ce soit, ce qui veut bien dire qu'il ne conçoit pas un tel objet mathématique, cela rejoint à mon sens le blocage grec dont tu parles. A la même époque et au siècle suivant, ceux qu'on appelle les « cossites »[21] ont une notation particulière pour chaque puissance qui bloque toute efficacité opératoire.

20 Maryvonne Spiesser, « L'œuvre de Nicolas Chuquet dans le contexte des savoirs mathématiques de la fin du XVe siècle », *Numdam*, 2006, tome 12, n°1 p. 7-33.

21 Du nom de « cosa » c'est-à-dire « la chose » (« die Coss » en allemand), qu'ils utilisaient pour dénommer l'inconnue. Par exemple, l'ouvrage de Christoph Rudolff de 1525 (Behend und hübsch Rechnung durch die kunstreichen regeln Algebre so gemeinicklich die Coss genent werden) que l'pn peut traduire par : « Calcul habile et joli par les ingénieuses règles de l'algèbre qui sera coramment nommée la Coss ».

ANNEXE 2 [22]

Hilbert n'est arrivé que lentement à cette vision nouvelle des fondements de la géométrie. Ainsi, en 1891, dans un premier cours consacré à la géométrie projective, il écrivait (p. 21) :

> « La géométrie est la science des propriétés de l'espace. Elle se distingue essentiellement des domaines des mathématiques pures comme p.ex. la théorie des nombres, l'algèbre, la théorie des fonctions. » Et plus loin, après avoir caractérisé les mathématiques pures, Hilbert affirme : « Il en va tout autrement avec la géométrie. [...] L'espace n'est pas un produit de ma pensée, mais il m'est donné par mes sens. J'ai besoin de mes sens pour approfondir [ergründen] ses propriétés. J'ai besoin de l'intuition et de l'expérience comme pour l'approfondissement des lois physiques, [...]. »

En 1894, Hilbert donne un cours sur les fondements de la géométrie. Son point de vue n'a pas évolué. On trouve en effet dans l'introduction ces lignes [Tœpell, 1986, p. 58] :

> « Parmi les phénomènes ou faits expérimentaux qui s'offrent à nous par la considération de la nature, il y a un groupe particulièrement remarquable, le groupe des faits qui déterminent la forme extérieure. La géométrie s'occupe de ces faits. [...]

En 1898 (p. 144), dans un cours sur les fondements de la géométrie euclidienne, Hilbert affirme toujours que « la géométrie est une science naturelle ».

22 Pour les détails de cette annexe, voir : Michael-Markus Tœpell, *Über die Entstehung von David Hilberts « Grundlagen der Geometrie »*, Göttingen, Vandenhœck & Ruprecht, 1986. (Les pages indiquées se rapportent à cet ouvrage.)

ANNEXE 3

Blaise Pascal écrit[23] :

> « Ces choses étant bien entendues, je reviens à l'explication du véritable ordre, qui consiste, comme je disais, à tout définir et à tout prouver.
>
> « Certainement cette méthode serait belle, mais elle est absolument impossible : car il est évident que les premiers termes qu'on voudrait définir, en supposeraient de précédents pour servir à leur explication (…).
>
> « Aussi, en poussant les recherches de plus en plus, on arrive nécessairement à des mots primitifs qu'on ne peut plus définir, et à des principes si clairs qu'on n'en trouve plus qui le soient davantage pour servir à leur preuve. » (…)
>
> « C'est ce que la géométrie enseigne parfaitement. Elle ne définit aucune de ces choses (…) parce que ces termes-là désignent si naturellement les choses qu'ils signifient, à ceux qui entendent la langue, que l'éclaircissement qu'on en voudrait faire apporterait plus d'obscurité que d'instruction. »

Remarquons en passant que Pascal reconnaît implicitement ici que les définitions initiales d'Euclide ne sont pas des définitions !

ANNEXE 4

Voici quelques extraits – traités ici dans leur esprit, non dans la lettre - de l'article de Glaeser mentionné plus haut.

> (p. 304) L'introduction conceptuelle des nombres négatifs a été un processus d'une lenteur surprenante. Elle a duré plus de mille cinq cents ans, depuis l'époque de Diophante jusqu'à nos jours !
>
> (p. 313) Ainsi la pratique « clandestine » du calcul des nombres relatifs précède de 1600 ans sa compréhension. Voilà bien une leçon que la didactique des mathématiques ne devrait pas oublier !
>
> (p. 316) A partir du XVIIe siècle, les nombres négatifs apparaissent tout naturellement dans les travaux scientifiques : ils sont acceptés en vertu d'une espèce de méthode Coué : l'efficacité du calcul suffit à conforter le mathématicien dans sa foi. C'est dans les écrits à caractère pédagogique que se manifeste le malaise. Le savant ne parvient pas à donner d'explication qu'il juge satisfaisante. Mais comme il ne peut décemment avouer sa faiblesse, il abuse de circonlocutions riches en formes grammaticales négatives. C'est là un *symptôme* que l'on trouve chez presque tous les auteurs que nous citons (à l'exception peut-être de Clairaut, qui écrit toujours avec autorité).

23 « Opuscules », in Pascal, *Œuvres complètes*, nrf Gallimard, Bibliothèque La Pléiade, 1954, p. 578-579.

Note à propos des « situations de blocage » : *le « paradigme de l'être et du signe »* (voir note 3)

Utilisés à satiété dans les situations les plus diverses par les mathématiciens, les nombres complexes laissent un arrière goût amer de « résultats conçus dans le péché ». Leur interprétation dans le plan d'Argand-Gauss, au début du XIXe siècle, rassure. Ils ne sont plus des signes vides, régis par le machinal de règles formelles, ils ont l'être que leur confère le géométral associé. Ils acquièrent ainsi droit de cité dans la communauté des êtres mathématiques « respectables ».

Voici un autre exemple qui va dans le même sens. Dans les deux premières décennies du XIXe siècle apparaît en Grande Bretagne un mouvement qui déboucha sur la création d'une algèbre symbolique. Les ingrédients sont en place pour que ce champ nouveau entre dans le courant normal de la pensée mathématique. Pourtant le processus s'arrête. C'est que, selon moi, à l'époque la lettre est inapte à produire de l'être. Ainsi Hamilton écrit-il à Peacock en 1846 :

> « (...) that the author designed to reduce algebra to a mere system of symbols, and *nothing more* ; an affair of pothooks and hangers, of blake strokes upon white paper, to be made according to a fixed but arbitrary set of rules : and I refused, in my own mind, to give the high name of *Science* to the results of such a system. (...) we [Hamilton and Graves] belong to opposite poles in Algebra ; since you, like Peacock, seem to consider Algebra as a <<System of signs and of their combinations >>, somewhat analogous to syllogisms expressed in letters; while I am never satisfied unless I think that I can look beyond or through the signs to the things signified. I habitually desire to find or make Algebra a system of demonstrations resting at last on intuitions, analogous in some way or other to Geometry as presented by Euclid. »

> (Il me semblait (…) que l'auteur envisageait de réduire l'algèbre à un pur système de symboles et *rien de plus* ; une affaire de crochets et de cintres, de traits noirs sur du papier blanc, construite à partir d'un ensemble fixe mais arbitraire de règles ; et je me refuse à donner le grand nom de *Science* aux résultats d'un tel système (…) nous [Hamilton et Graves] appartenons au pôle opposé en algèbre ; alors que vous et Peacock semblez considérer l'algèbre comme un système de signes et de leurs combinaisons, quelque chose comme des syllogismes exprimés en lettres, je ne suis jamais satisfait à moins que je pense que je peux voir derrière ou à travers les signes les choses signifiées. Je désire d'ordinaire trouver ou faire de l'algèbre un système de démonstrations reposant finalement sur des intuitions, analogue d'une manière ou d'une autre à la Géométrie telle que présentée chez Euclide.)

Il est un second personnage, considérable dans la vie scientifique anglaise, qui est également intervenu en défaveur du vent nouveau que Peacock et ses amis faisaient souffler. C'est William Whewell. Le maître de Cambridge avait, lui aussi, préconisé les mathématiques comme fer de lance de l'éducation libérale, mais il avait dénié toute valeur éducative à la nouvelle algèbre symbolique. Dans son *Thoughts on the Study of Mathematics as a Part of a Liberal Education* de 1835, il décrie (p. 26) une mathématique « taught in such a manner that its foundations appear to be laid in arbitrary definitions without any corresponding act of the mind. » (enseignée d'une manière telle que ses fondements semblent résider dans des définitions arbitraires sans un quelconque acte de pensée correspondant.).

Mme Christiane Ruffieux a soutenu sous ma direction une thèse de doctorat intitulée « La naissance du concept de structure algébrique en Grande-Bretagne dans la première moitié du 19ème siècle. Influence des philosophes de l' École Écossaise du Sens Commun **».** Je lui avais proposé d'examnier dans quelle mesure l'algèbre symbolique développée en Grande Bretagne dans les années 1810 pouvait être liée à des thèses de cette « École Écossaise » de la deuxième moitié du XVIIIème siècle. La réponse que l'on trouve dans le travail de Mme Ruffieux confirme bien cette hypothèse.

Ce sont là des exemples de ce que l'on appelle parfois le « Zeitgeist », auquel j'ai consacré plusieurs publications.

Bibliographie

Gaston Bachelard, *Le nouvel esprit scientifique*, PUF, Paris, 1963, p. 22. Edition originale 1934.

Florian Cajori, *A History of mathematical Notations*, 2 vol., Open Court Pub. Co., La Salle,1928-1929. Publié en un volume par Dover Publications, Inc, New York, 1993.

Pierre Dugac, « Éléments d'analyse de Karl Weierstrass », *Archive for History of Exact Sciences*, volume 10, 1973, p.41-176, p. 77.

Georges Glaeser, « Epistémologie des nombres négatifs », *Recherches en didactique des mathématiques*, vol. 22, 1981, p. 303-346, p. 305.

« Opuscules », in Pascal, *Œuvres complètes*, nrf Gallimard, Bibliothèque La Pléiade, 1954, p. 578-579.

Jean-Claude Pont,

(avec Marc-André Pichard), *Méthodes modernes en mathématique élémentaire*, SPES, Lausanne et Dunod, Paris, 1972.

« Les symboles mathématiques, signes du Ciel », in (dir.) Jean-Yves Béziau, *La pointure du symbole*, Éditions Petra, Paris, 2014, p. 337.

« Révolution conceptuelle en mathématiques au XIXe siècle », *Philosophical Inquiry*, vol. XXIII, 2001, p. 105-146.

« Le nombre et son statut vers le milieu du XIXème siècle, à la lumière de quelques traités », *Sciences et Techniques en perspective*, 2e série, vol. 8, n° 1, 2004, p. 19-55.

Maryvonne Spiesser, « L'œuvre de Nicolas Chuquet dans le contexte des savoirs mathématiques de la fin du XV^e^ siècle », *Numdam*, 2006, tome 12, n°1 p. 7-33.

Michael-Markus Tœpell, *Über die Entstehung von David Hilberts « Grundlagen der Geometrie »,* Göttingen, Vandenhœck & Ruprecht, 1986.

Heinrich Weber, « Leopold Kronecker », *Jahresberichte der deutschen Mathematiker Vereinigung*, vol. 2,□1891-1892, p. 19-20.