
LEVE DE PLAN AU GRAPHOMETRE : DE LA COUR A LA FEUILLE DE PAPIER OU A L'ECRAN D'ORDINATEUR

David CHATELON
et Marc TROUDET¹
Irem de Grenoble

« La topographie est l'art de déterminer la forme d'un terrain. Nous nous proposons uniquement ici, d'exposer les principes géométriques sur lesquels repose la topographie, (...).

Il est, d'ailleurs, à peine utile d'ajouter que la lecture de ceux-ci ne saurait être poursuivie utilement si on ne la complète en effectuant soi-même sur le terrain, les opérations étudiées. »

J. Hadamard [6, p 283]

L'article suivant détaille une activité du groupe « Géométrie pratique à l'aide d'instruments scientifiques anciens » de l'IREM de Grenoble, proposée en 2012-2013.

Cette expérience d'introduction d'une perspective historique dans l'enseignement des mathématiques a été précédée de la fabrication d'instruments scientifiques² : ceux-ci sont inspirés des instructions trouvées dans le second tome de *La géométrie pratique* d'Allain Manesson Mallet [10] et *De re et praxi geometrica libri tres, figuris et demonstrationibus illustrati*, d'Oronce Fine [15].

¹ Professeurs de mathématiques au collège de l'Isle, 38200 Vienne, animateurs du groupe Géométrie pratique à l'aide d'instruments scientifiques anciens de l'Irem de Grenoble.

Durant cette période, à mesure que des instruments étaient réalisés, des tests grandeur nature se sont révélés nécessaires. Le carré géométrique, le quart de cercle et le graphomètre ont d'abord été utilisés par des élèves volontaires, comme outils pour la mesure de grandeurs inaccessibles dans les classes ou la cour du collège. Les apprentis arpenteurs disposaient également de planches extraites des deux livres cités précédemment, mettant en scène et détaillant l'utilisation des instruments en situation. Six ateliers d'une heure nous ont permis d'observer les réactions de nos élèves face aux expériences proposées, mais également les difficultés

² Voir sur le site de l'Irem de Grenoble des exemples de quart de cercle de graphomètre, de carré géométrique fabriqués en bois (méthode artisanale) par M. Arnissolle, professeur d'histoire-géographie au collège C.G Grange, 38200 Seyssuel

éventuelles dans la manipulation des instruments ou la compréhension des images extraites d'ouvrages anciens.

Encouragés par l'implication et les réactions d'élèves d'une classe de 5ème de David Chatelon, nous avons décidé de proposer à la classe entière la réalisation d'un levé de plan de la cour du collège à l'aide d'un décimètre et d'un graphomètre.

1. — En quoi consiste un levé de plan ?

Jacques Hadamard, en donne la définition suivante [6, p 286] :

« Lever le plan d'un terrain, c'est noter tous les éléments qui déterminent la forme et les dimensions de ce plan. Lorsqu'on a levé le plan d'un terrain, on est alors à même de construire, sur le papier, une figure semblable à la projection horizontale de ce terrain, avec un rapport de similitude donné. »

C'est ce que l'on nomme rapporter le plan sur le papier. Le rapport de similitude en question se nomme l'échelle du plan ainsi tracé, elle est également appelée échelle de réduction par A. Guilmin [5, p 12]. L'étendue de la cour de notre collège étant assez faible (déplacement inférieur à 2 km), il n'est pas nécessaire de tenir compte de la sphéricité de la terre.

Pour lever le plan d'un terrain, on commence par choisir un certain nombre de points assez espacés afin de former un ou plusieurs polygones contigus. Cette première opération s'appelle le levé du canevas d'ensemble. On procède ensuite au relevé des détails.

Plusieurs méthodes et instruments sont utilisés par les arpenteurs ; nos élèves disposaient d'un décimètre pour effectuer des mesures de longueurs, d'un graphomètre pour des mesures d'angles, ainsi que d'une reproduction de la planche XXV extraite du tome II de *La géométrie pratique* d'Allain Manesson Mallet [10, p 57].

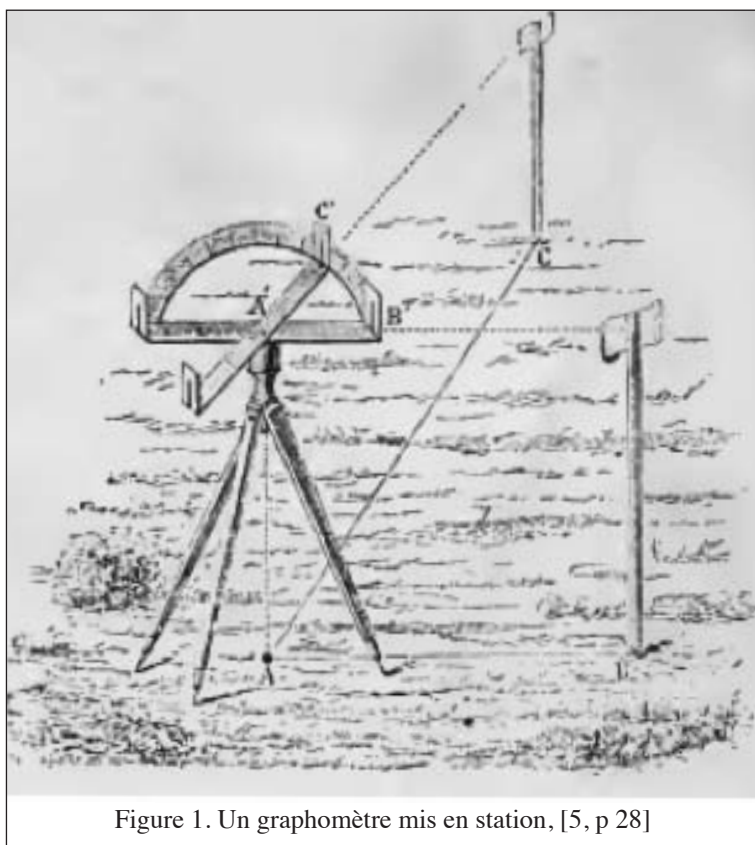
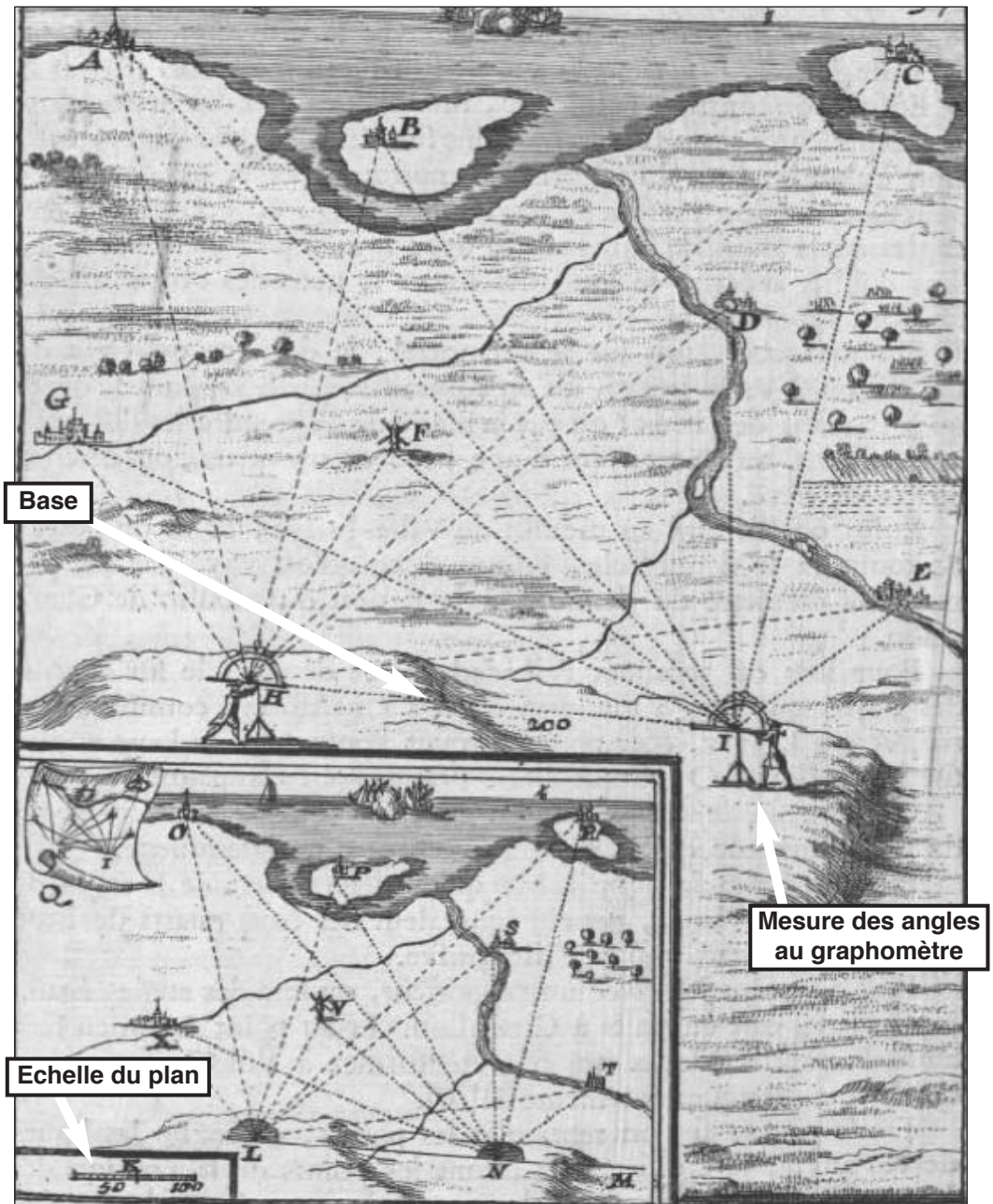


Figure 1. Un graphomètre mis en station, [5, p 28]

LIV. II. *De la Trigonometrie.*
PLANCHE XXV.

Figure 2.



La figure 2 montre un levé de plan réalisé avec la méthode par intersections. Les étapes en sont les suivantes : on choisit sur le terrain une base d'où l'on puisse apercevoir tous les points à repérer ; on la mesure ensuite avec soin puis on mesure les angles qu'elle forme avec les droites joignant ses extrémités aux points à repérer.

Plusieurs contraintes sont signalées par A. Guilmin [5] lors de l'utilisation de cette méthode :

- choisir une base d'où l'on puisse apercevoir tous les sommets du polygone est indispensable ;
- il est également nécessaire que la base ne soit vue d'aucun des sommets du polygone sous un angle soit très aigu ou soit proche de 180° ; en effet, « vu l'épaisseur des lignes tracées sur le papier, le lieu de leur rencontre est alors une espèce de losange dans lequel il faut distinguer le point d'intersection des lignes géométriques. » [5, p 34]
- Il recommande donc de choisir « la base aussi grande que possible, à peu près le cinquième ou le sixième de la plus grande des lignes joignant ses extrémités aux points à relever. Il faut la choisir telle qu'il ne se trouve aucun de ces points sur son prolongement. » Attention, cette construction ne peut également être utilisée si divers obstacles cachent le sommet d'un ou plusieurs angles.

2. — Motivations et relations avec le programme

L'une des deux idées essentielles de l'enseignement de la géométrie au collège³ est la

poursuite d'une pratique développant la perception et l'utilisation des instruments.

Cette activité de géométrie pratique permet à l'élève de travailler dans plusieurs environnements : la cour du collège, la feuille de papier et l'écran d'ordinateur par le biais d'un logiciel de géométrie dynamique. La prise d'informations sur le terrain nécessite de recourir à une figure à main levée ; le schéma ne va conserver que les informations permettant de construire une figure à l'échelle par la suite, il permet le passage de l'environnement concret à sa représentation géométrique. Cette compétence est visée pour les élèves volontaires qui procèdent aux mesures sur le terrain : « les apprentis arpenteurs ».

Leurs camarades, lors de l'exploitation en classe, vont travailler à partir des figures à main levée et de leur propre perception de la cour. En cas de questions sur les schémas, les apprentis arpenteurs peuvent alors agir comme personnes ressources et repréciser d'éventuelles zones d'ombre, ce sont là des activités de communication permettant un réinvestissement du vocabulaire géométrique abordé depuis le début du collège.

La forme de deux zones de la cour rend pertinente l'utilisation du graphomètre pour effectuer des levés de triangles. Une fois mesuré sur le terrain un triangle déterminé par un côté et ses 2 angles adjacents, l'élève effectue le tracé du triangle au rapporteur ou avec un logiciel de géométrie, une connaissance de 5ème visée à travers cette activité.

La notion d'échelle est également enseignée en 5ème ; à l'issue de cet enseignement, l'élève doit être capable d'utiliser l'échelle ou

³ Ressources pour les classes de 6ème, 5ème, 4ème et 3ème du collège : géométrie, Eduscol, juillet 2007

de la calculer. Lors de la partie construction sur feuille en classe, les élèves ont alors à choisir une échelle adaptée. L'enseignement de l'échelle nous paraît tirer avantage à être complété par des séances sur le terrain où cette notion prend tout son sens.

Agrandir ou réduire une figure en utilisant la conservation des angles et la proportionnalité entre les longueurs de la figure initiale et de celles de la figure à obtenir n'est au programme que de 4^{ème}. Cependant, l'agrandissement-réduction est enseigné dès le cycle 3. Lorsqu'on l'évoque en début de collège, un élève est le plus souvent capable de donner spontanément de nombreux exemples de la vie courante : zoom de l'appareil photo, maquette, plan, etc.

Lors de l'expérimentation sur le terrain et du traitement des données en classe, les 5^{èmes} peuvent également s'appuyer sur l'illustration reproduite à la figure 2. Comme pour les autres activités de géométrie pratique, nous avons fait le choix de présenter uniquement ces images sans les textes qui les accompagnent dans l'ouvrage de Manesson Mallet cité plus haut. Celle reproduite à la figure 2 montre l'utilisation des graphomètres sur le terrain à l'élève qui n'aurait pas effectué les mesures ; cette planche « visualise le concept » [8 p 109] qui permet de reproduire sur le papier ou l'écran d'ordinateur les figures mesurées sur le terrain. Nous pensons que ces images, associées à l'utilisation d'instruments de mesure sur le terrain, vont faciliter la compréhension du concept d'agrandissement-réduction.

3. — Description de la séquence levé de plan

Lors de la première séance, nous avons proposé aux élèves l'activité suivante : « Vous disposez d'un décimètre, d'un graphomètre et

de la planche projetée au tableau (figure 2), établissez le plan de la cour ou d'un secteur de la cour sur une feuille ou un écran d'ordinateur. »

Après une phase de lecture et de réflexion individuelle de l'énoncé, une discussion débute autour de la figure 2. Les élèves y distinguent rapidement en bas de la planche, une carte à l'échelle sur le parchemin et en haut de la planche les lieux à représenter. Ils constatent aussi que les triangles ont tous la même base. Une explication est nécessaire pour donner le rôle des arpenteurs utilisant le graphomètre. Les élèves comprennent alors que pour repérer chaque ville, il suffit de mesurer les deux angles \widehat{HIM} et \widehat{IHM} .

Les élèves observent enfin que les angles de la réalité et les angles de la carte semblent égaux. Il suffira donc, pour tracer la carte de tracer la base à une échelle donnée puis des triangles, connaissant la longueur d'un côté et ses deux angles adjacents. Le travail est alors divisé en trois phases :

- Relevé des angles effectués par cinq élèves volontaires,
- Tracé des figures sur papier ou avec Geogebra,
- Comparaison des résultats.

Première étape sur le terrain

Cette étape s'est déroulée sur deux séances d'une heure, pendant des temps d'étude ou entre 13h et 14h ; nous encadrions les cinq élèves volontaires sur le terrain.

Après une phase d'observation des lieux afin de choisir les instruments et méthodes à utili-

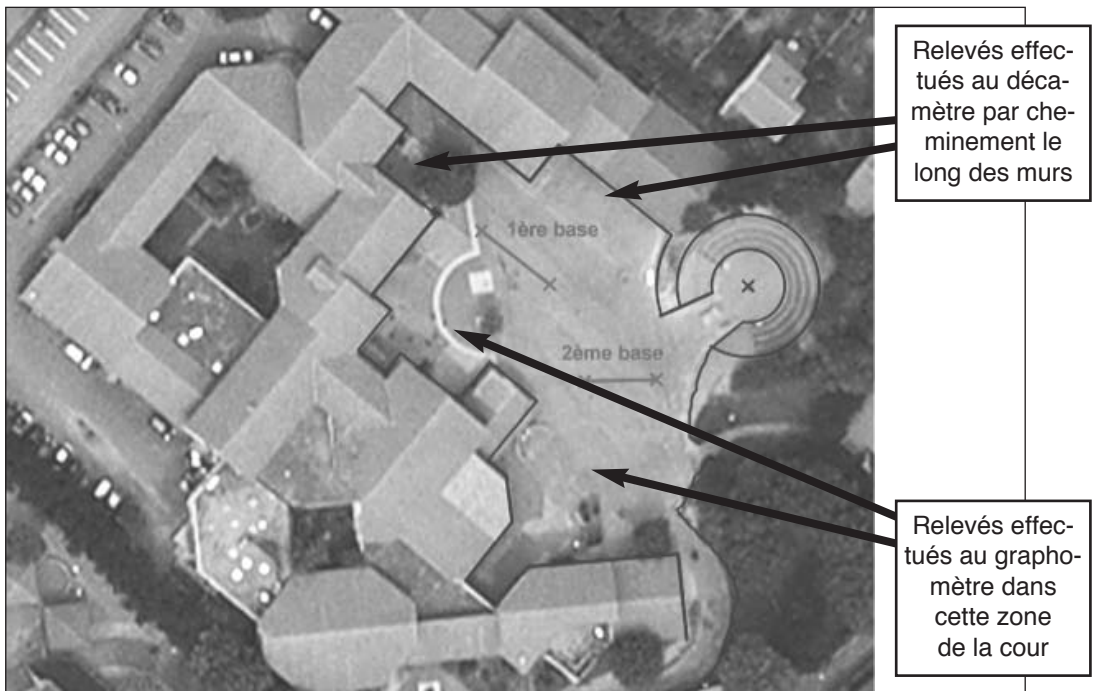


Figure 3 : vue aérienne du collège (Extrait <http://fr.maps.yahoo.com>)

ser pour effectuer des mesures sur le terrain, les relevés de longueurs et d'angles ont ensuite été effectués avec un décamètre et un graphomètre puis plusieurs figures à main levée résumant les relevés ont été établies.

Les élèves ont constaté qu'une zone de la cour, de contour rectiligne et de dimensions inférieures à 10 m, pouvait être mesurée à l'aide d'un décamètre, en cheminant le long des murs. Les relevés dans la zone située devant entre le foyer, la salle informatique et sous le préau (figure 3) ont ainsi été effectués avec cette méthode mais faute de temps, ces données n'ont pas été exploitées en classe par la suite. Pour la zone située devant le hall d'entrée et la vie scolaire, de nombreux obstacles (bancs en

Pierre, végétation) rendaient difficile la mesure au décamètre du contour rectiligne. La position surélevée du graphomètre, un mètre au dessus du sol, facilitait alors les relevés.

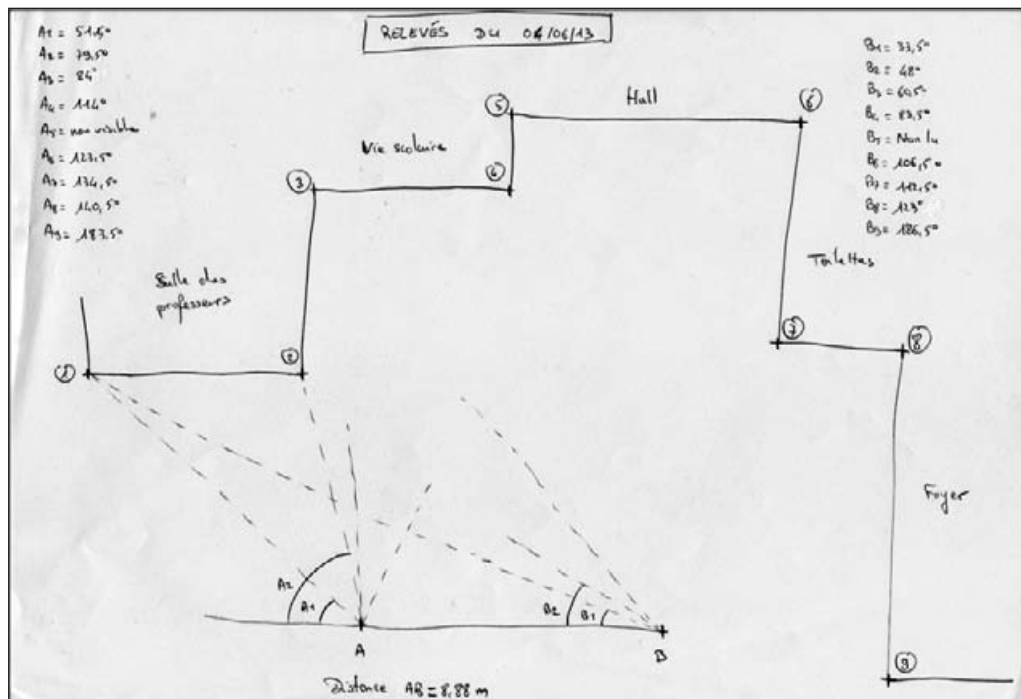
Pour la zone relevée à partir de la deuxième base, les contours comportant des angles obtus ont motivé l'utilisation de la méthode des intersections. Une autre difficulté pour les cinq élèves qui ont réalisé les relevés a été de trouver une base d'où l'on puisse apercevoir tous les points à repérer. Une fois la base choisie et repérée sur le terrain, il fallait également pouvoir la retrouver plus tard si les relevés n'étaient pas terminés. Les deux bases ont donc été choisies sur des lignes peintes d'anciens terrains de sport.

La zone située au Nord devant le forum circulaire n'a pu être relevée, faute de temps, l'année se terminant et risquant d'empêcher l'exploitation par la classe des données récoltées par leurs cinq camarades. Du point de vue technique, la mise en place du graphomètre s'est effectuée de la manière suivante : positionnement du centre du graphomètre à la verticale d'une extrémité de la base, alignement de l'alidade fixe avec la deuxième extrémité de la base. Les angles des murs ont ensuite été visés à l'aide de l'alidade mobile puis les mesures reportées sur le schéma à main levée du contour (figure 4). Les élèves ont été confrontés à l'utilisation méticuleuse du graphomètre et à la recherche de la mesure "juste". Ils ont ainsi pu se rendre compte que de multiples paramètres modifient leurs mesures :

- deux élèves visant le même jalon avec le même réglage ne trouvent pas la même mesure,
- il est difficile pour un même élève de retrouver le même résultat si l'appareil a été déréglé lors de la mesure précédente,
- bien que le graphomètre utilisé soit équipé d'une alidade précise, la visée est source d'interprétation,
- à aucun moment les élèves ne se sont spécialisés dans une tâche, ils ont effectués les actions de réglage et de mesure dans l'ordre mais sans réel souci de précision et d'efficacité.

Toutes les mesures d'angles ont été relevées, au demi-degré près, et reportées sur un schéma (figure 4).

Figure 4



Deuxième étape en salle informatique

L'objectif de l'activité a, au préalable, été rappelé à la classe de 5ème : utiliser les données collectées sur le terrain afin de tracer un plan à l'échelle d'une partie de la cour.

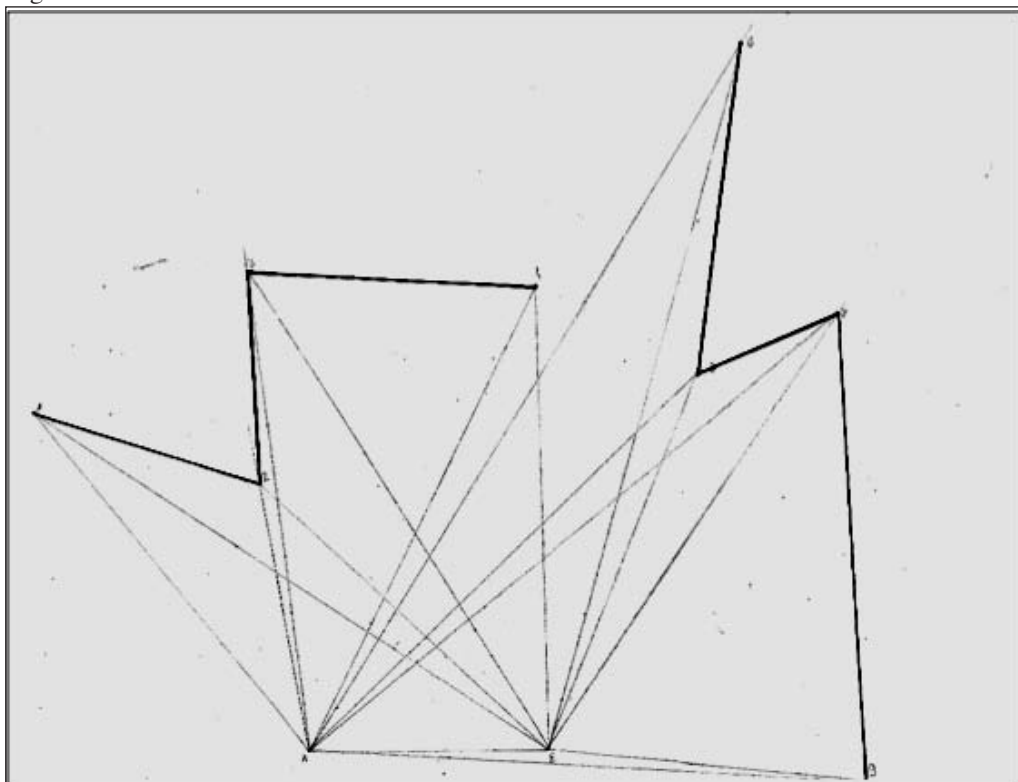
La classe a été divisée en deux groupes : la moitié des élèves a travaillé avec Geogebra (après deux séances sur ce logiciel en cours d'année), l'autre moitié a réalisé les figures sur feuille avec les instruments de géométrie.

Les élèves, utilisant rapporteur et règle, disposaient d'une feuille A3. Afin de trouver

une échelle satisfaisante pour réaliser une figure, ils ont commencé par effectuer des expérimentations sur des exemples. Ils ont procédé par essais successifs et n'ont pas ensuite rencontré de difficulté particulière lors des constructions de triangles avec un côté et deux angles connus. Les figures 5 et 6 montrent deux exemples de figures obtenues à partir de tracés effectués sur papier à l'échelle 1/100.

Les élèves utilisant l'informatique avaient l'avantage de pouvoir zoomer ou dézoomer sur l'écran et ne se sont donc pas posés la question de l'échelle. Ils ont choisi naturellement 1 cm pour 1 m. En revanche, ils ont eu beau-

Figure 5



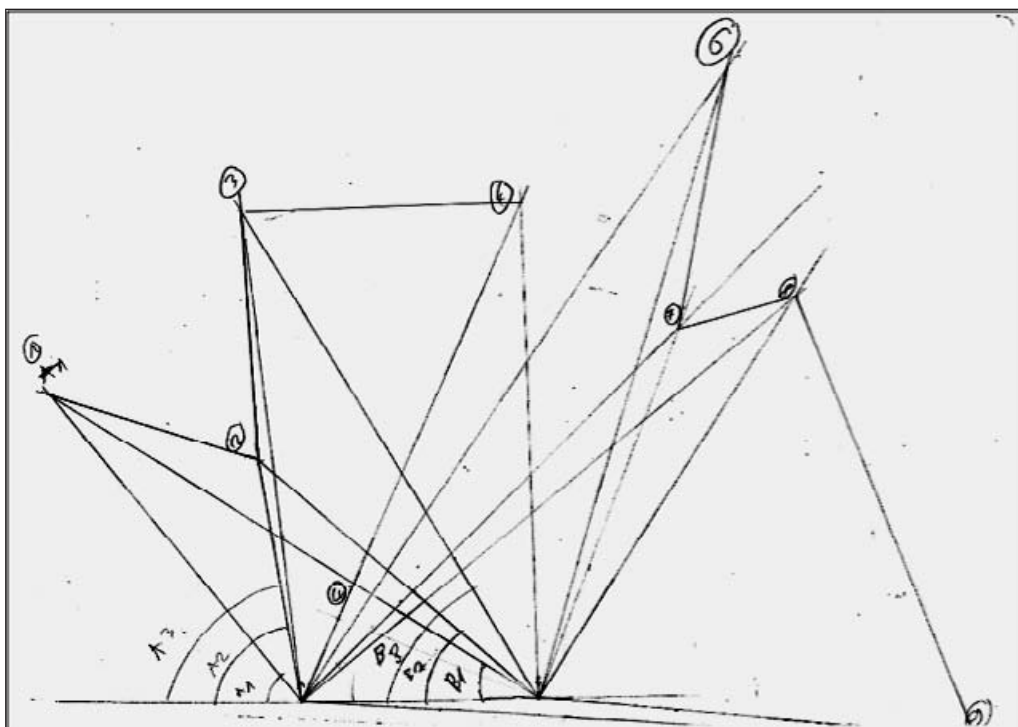


Figure 6

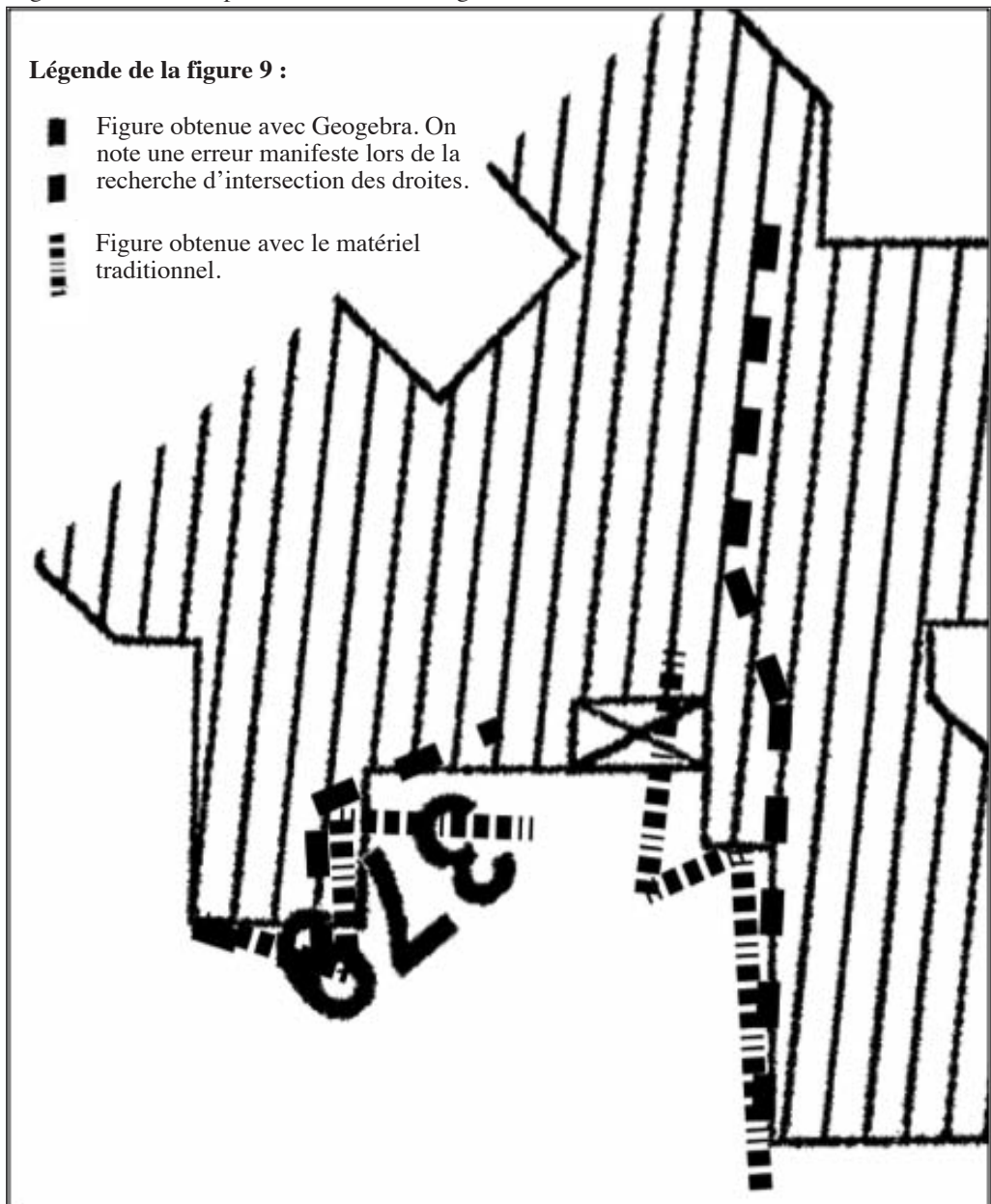
coup de mal à mettre en place une stratégie de construction correcte.

Leur première idée a été de tracer tous les angles sans rechercher les points d'intersection ce qui a produit une figure surchargée et inutilisable. La procédure utilisée avec succès a été de tracer une paire d'angles ($A_i ; B_i$), de créer le point d'intersection i puis d'effacer les traits de construction avant de passer à la construction du point $i + 1$. On se reportera aux deux exemples de constructions effectuées sous Geogebra dans les figures 7 et 8.

Durant la phase de mise au propre, les élèves ont eu des difficultés à avoir un esprit

critique vis-à-vis de leur production car ils n'avaient qu'une idée vague du résultat final attendu. Ils ont peu fait le lien avec les activités pendant lesquelles ils ont déjà utilisé un plan : jeu de piste dans le collège lors de leur rentrée en 6ème, course d'orientation en EPS, lecture de plan en technologie. Lors de cette démarche de recherche, les élèves ayant participé aux mesures sur le terrain ont eu davantage de facilités à effectuer les constructions. Nous n'avons pas donné de photocopie du plan de masse du collège à nos élèves, il nous semble a posteriori qu'elle leur aurait permis de contrôler les résultats obtenus tout au long de la phase d'opérations graphiques et ainsi commencer à s'interroger sur les erreurs éventuelles.

Figure 9 : Extrait du plan de masse du collège



3ème étape en classe entière

Il s'agit d'une séance qui a eu lieu une dizaine de jours après les tracés pour comparer les figures obtenues avec le cadastre ; elle était souhaitée par les élèves qui attendaient en effet la conclusion de ce travail. A cette occasion, nous avons récapitulé l'ensemble de la démarche et les outils mathématiques utilisés. La comparaison des travaux et de la réalité a ensuite été faite par superposition des figures sur les relevés cadastraux. Ce travail de superposition avait été effectué par le professeur, nous l'avons présenté à la classe au vidéoprojecteur.

Le résultat final a déconcerté quelque peu les élèves car les tracés obtenus se sont avérés assez éloignés de la réalité. Cet état de fait a suscité le débat au sein de la classe.

Les nombreuses erreurs possibles ont alors été évoquées :

- Lors des relevés sur le terrain, un positionnement du graphomètre imprécis, une mise en station trop rapide, l'habileté de l'opérateur « débutant » ou confirmé, le mouvement du graphomètre lors de la visée ou des jalons insuffisamment visibles sont autant de facteurs qui peuvent expliquer en partie les différences observées [14, p 27].
- L'étape de construction réclame également une grande minutie. Outre la précision des tracés, les données étant nombreuses, il fallait mettre en place une organisation dans le travail qui permette de progresser point par point. C'est cet aspect qui a mis les élèves le plus en difficulté. Ce fut un bon moyen pour découvrir les conséquences des imprécisions tout au long de la chaîne de création. L'expression tirée de l'Encyclopédie de Diderot et D'Alembert, « l'art de prendre des angles » a pris ici tout son sens. Les élèves ont fait l'expérience de la

rigueur sur le terrain, rigueur des relevés jusqu'aux tracés sur la feuille ou l'écran.

Conclusions et perspectives

Ce projet a rencontré l'adhésion des élèves. Ils ont réclamé de terminer les tracés malgré la fin de l'année qui arrivait à grands pas, l'activité ayant débuté fin mai. La curiosité de voir le résultat des relevés était très forte. A travers ce levé de plan, les élèves ont pu découvrir que l'homme a élaboré des outils qui permettent de se représenter le monde qui l'entoure.

Xavier Lefort, dans son article « *Images de la topographie* » [7, p 219], rappelle que la topographie est un exemple de la démarche élémentaire des mathématiques : passer du concret à un modèle (le levé) et revenir de celui-ci à la réalité (l'implantation). Dans notre activité, il ne fut pas encore question cette année de modification de la cour ; cependant, nos ateliers, les instruments et l'iconographie extraite de la géométrie pratique de Manesson Mallet ont suscité la curiosité des élèves mais aussi de nos collègues. Nous avons ainsi discuté avec notre collègue X. Roulot⁴ des programmes de technologie⁵. Plusieurs connaissances enseignées permettent d'établir des passerelles entre les enseignements de mathématiques et technologie :

- La modélisation du réel (le levé de plan),
- l'échelle qui doit être abordée en situation concrète et en relation avec le problème à résoudre,
- l'évolution de l'objet technique dans un contexte historique et socio économique.

⁴ Professeur de technologie au collège de l'Isle à Vienne et formateur au plan académique de formation de l'académie de Grenoble.

⁵ Programmes de l'enseignement de technologie, Bulletin officiel spécial n° 6 du 28 août 2008.

Nous avons découvert un terrain pluridisciplinaire et nous envisageons de modifier dans les deux matières nos progressions afin de travailler sur le même thème en parallèle et ainsi de repenser notre approche habituelle. En effet, en mathématiques, l'élève doit être capable d'utiliser l'échelle ou de la calculer. Son enseignement consiste souvent en une suite d'exercices techniques et déconnectés du terrain où elle prend pourtant tout son sens ; l'écriture du rapport d'échelle peut d'ailleurs rester très abstraite et pose fréquemment les difficultés suivantes : problème d'unités ou inversion du numérateur et du dénominateur. L'apprentissage et l'utilisation concertés avec le professeur de technologie au cours d'un projet de classe et le contact avec la réalité qui va de pair nous paraissent alors être des atouts.

La démarche entreprise avec la technologie permettra de donner un objectif très concret aux élèves : nécessité de produire une image précise de la cour pour pouvoir la modéliser et réaliser par la suite l'implantation d'un préau par exemple.

Par ailleurs, l'usage du graphomètre s'appuie sur la proposition 4 du livre VI des *Eléments* d'Euclide : « Dans les triangles équiangles, les côtés qui sont autour des angles égaux sont proportionnels, et on appelle côtés homologues ceux qui sous-tendent des angles égaux. » [11]. L'introduction d'une perspective historique à travers l'usage du graphomètre éclaire un des nombreux usages pratiques du théorème dit de Thalès. Le plan de la cour pourrait être également ré exploité en 3ème à l'occasion d'un travail sur l'effet de l'agrandissement-réduction sur les aires.

L'erreur et ses multiples causes évoquées lors du bilan avec les élèves est un autre aspect de ce travail. En technologie, elle peut justifier l'évolution des instruments de mesure en fonction des besoins. En mathématiques, on pourrait envisager de faire effectuer un nombre nettement plus important de mesures de chaque angle sur le terrain. Les données obtenues sur le terrain seraient alors exploitées en statistiques en 4ème pour introduire le calcul de la moyenne. En effet, « la loi normale modélise les situations aléatoires possédant de nombreuses causes indépendantes dont les effets s'ajoutent ; le cas des mesures géodésiques en est un exemple, une estimation optimale de l'angle consistera à effectuer la moyenne des mesures obtenues sur le terrain. » [14, p 26 et 27]. .

De nos jours, le graphomètre a cédé la place au théodolite et la carte mémoire remplacé les croquis réalisés sur le terrain. Après comparaison des résultats obtenus et du cadastre, les élèves peuvent alors comprendre quels progrès l'évolution technique des instruments a permis de réaliser, et c'est à cette étape que la participation d'un géomètre-expert peut conclure un tel projet. A ce sujet, à l'occasion de la semaine des mathématiques, M. Bourguignon, géomètre-expert de Vienne, nous a fait l'amitié de venir, pendant la pause du midi, afin de montrer l'utilisation du théodolite ; comme lors de toutes les activités de géométrie pratique proposées ces deux dernières années, la trentaine d'élèves présents se sont impliqués avec énergie dans la mesure au décamètre, télémètre et théodolite.

Bibliographie

Documentation :

[1] Chevallard Yves, conférence donnée à l'IUFM d'Aix-Marseille le 25 octobre 2000 : *Les mathématiques et le monde : dépasser « l'horreur instrumentale »*.

dernière consultation le 19 octobre 2013 :

http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/article.php3?id_article=12

[2] Bibliothèque tangente, *Mathématiques et géographie, la Terre vue des maths*, HS N°40, éditions Pôle, Paris, 2011.

[3] Galion thèmes, *THEME Arpentage*, Galion, Lyon, 1995.

[4] Guichard Jean Paul : *Les angles au collège : arpentage et navigation* dans Barbin Evelyne, *De grands défis mathématiques, d'Euclide à Condorcet*, Vuibert, Paris, 2012.

[5] Guilmin A., *Cours de mathématiques appliquées levé de plans, arpentage, nivellement, notions de géométrie descriptive*, Durand, Paris, 1861, (consultable sur gallica).

[6] Hadamard Jacques, *Leçons de géométrie élémentaire, géométrie dans l'espace*, vol. 2, Armand Colin, Paris, 1947.

[7] Hébert Elisabeth, *Instruments scientifiques à travers l'histoire*, Ellipses, Paris, 2004.

[8] Jacobi Daniel, Schiele Bernard, *Vulgariser la science, le procès de l'ignorance*, collection milieux, Champ Vallon, 1988, Seyssel.

[9] Johan Patrice, *Géomètres en herbe « à l'ancienne »*, *Pratiquer en Cm une géométrie de terrain inspirée des méthodes de l'Antiquité et du Moyen Age*, Repères irem n°23, p. 31-42 TOPIQUES éditions, Metz, avril 1996.

[10] Manesson Mallet Allain, *La géométrie pratique*, divisée en 4 livres, livre II, Anisson, Paris, 1702, source Bibliothèque numérique de l'INHA, collections Jacques Doucet, (consultable sur Gallica).

[11] Peyrard François, *Les œuvres d'Euclide*, imprimeur-libraire M. Patris, Paris, 1804.

[12] Puille David, *Cours complet d'arpentage élémentaire, théorique et pratique à l'usage des divers établissements d'instruction publique*, A. Fouraud, Paris, 1849, (consultable sur Gallica).

Pour aller plus loin :

[13] Danfrie Philippe, *Déclaration de l'usage du graphomètre*, Danfrie, Paris, 1597, (consultable sur Gallica).

[14] Dutarte Philippe et Kern Christian, *La statistique inférentielle en quatre séances, carnet de stage* Publication N° 118 de la CII lycées techniques, Irem de Paris Nord, Villetaneuse, 2002.

[15] Fine Oronce, *De re et praxi geometrica libri tres, figuris et demonstrationibus illustrati*, Ae. Gourbinum, Paris, 1556, (consultable sur Gallica).

[16] Lefort Jean, *L'aventure cartographique*, Belin Pour la science, Paris, 2004.