

INVITATION À DES RÉFLEXIONS
SUR LA
RÉSOLUTION ALGÈBRIQUE DES ÉQUATIONS

Olivier GEBUHRER

Avertissement :

C'est de propos délibéré que l'on a exclu de cet article tout développement de technique mathématique : cette dimension n'éclairait pas notre propos ; elle mériterait naturellement une étude en soi (maîtrise des notations, condensation des expressions, virtuosité de calcul, conduite du calcul . . .). Quelques termes mathématiques sont brièvement expliqués en fin d'article (rubrique Glossaire).

Le Mémoire de LAGRANGE (1770 – 1771) à l'Académie royale des Sciences et Belles Lettres de Berlin occupe, on le sait, une place charnière dans le développement des idées modernes sur la théorie algébrique des équations. Dans “*L'Ouvert*” n° 44, J.P. FRIEDELMEYER a mis en évidence la conjoncture mathématique dans laquelle va s'inscrire le travail de LAGRANGE.

Nous voudrions ici revenir sur la **démarche mathématique concrète** de LAGRANGE, esquisser sa mise en perspective dans son époque, peut-être la situer dans quelques problèmes historiques d'aujourd'hui.

1. — Une mathématique nouvelle

Citons LAGRANGE d'entrée de jeu :

“Je me propose dans ce Mémoire d'examiner les différentes méthodes que l'on a trouvées jusqu'à présent pour la résolution algébrique des équations, de les réduire à des principes généraux et de faire voir a priori ⁽¹⁾ pourquoi ces méthodes réussissent pour le troisième et le quatrième degré, et sont en défaut pour les ⁽²⁾ degrés ultérieurs. Cet examen aura un double avantage : d'un côté, il servira à répandre une plus grande lumière sur les résolutions connues du troisième et du quatrième degré ; de l'autre il sera utile à ceux qui voudront s'occuper de la résolution des degrés supérieurs en leur fournissant différentes vues pour cet objet et en leur épargnant surtout un grand nombre de pas inutiles.”

Cette introduction du Mémoire de LAGRANGE constitue une trace marquante du

© “*L'Ouvert*” 45 (1986)

⁽¹⁾ caractères droits = passages soulignés par LAGRANGE

⁽²⁾ caractères gras = passages soulignés par l'auteur

passage à une nouvelle époque mathématique, à plusieurs titres :

a) Ce n'est pas l'objet de LAGRANGE de présenter ici un Mémoire d'exposé de résultats et des méthodes qui y conduisent. Il s'agit bien de l'exposé de **tout un mouvement de pensée** conduisant à l'**expression de problématiques** et à la mise en évidence d'un **champ explicite de recherches nouvelles**.

b) LAGRANGE énonce ici clairement les lignes directrices d'un processus de recherche mathématique nouveau : faire le **bilan critique** complet de toute l'expérience empirique et technologique accumulée antérieurement, dégager les points nodaux des impasses mises en évidence par cette expérience empirique, concevoir et énoncer ce qui est général dans le particulier, permettre ainsi de dégager la nécessité d'**outils nouveaux** (conceptuels et technologiques) pour la connaissance de ce qui est particulier.

(Loin d'être un cercle vicieux, cette démarche dégage l'horizon tout en éclairant la première phase d'une lumière nouvelle.) On aura noté que LAGRANGE n'a pas en vue l'éventualité de l'équation du 5^e degré mais bien l'étude **des degrés ultérieurs**.

c) LAGRANGE manifeste ici une conscience explicite du fait que la recherche mathématique est le fruit d'une **activité collective** dans laquelle les problèmes nouveaux ouverts à l'investigation sont potentiellement plus riches que les problèmes résolus.

d) Conscient des limites de son propre travail, loin d'en tirer des conséquences pessimistes quant aux possibilités cognitives de l'esprit humain, **ou de ruser avec l'énoncé du problème fondamental**, LAGRANGE entend explicitement reconstituer les éléments de la démarche historique elle-même pour "*épargner un grand nombre de pas et de tentatives inutiles*".

e) Enfin — mais peut-être n'est-ce pas l'aspect le moins novateur de cette étonnante introduction — l'indication apparemment dépourvue de tout complexe dans son audace, de l'existence de "*différentes vues*" pour cet objet. Il s'agit ici d'angles d'attaque divers éclairant l'objet d'étude d'une multiplicité possible de dimensions **non directement** soupçonnables lorsqu'on ne s'intéresse qu'au résultat du calcul.

2. — "Science sans conscience n'est que ruine de l'âme".

Passons brièvement en revue les différentes parties du Mémoire : les deux premières parties examinent en détail les méthodes connues de résolution des équations algébriques du troisième et du quatrième degré.

Cet examen détaillé a un sens profond et rien n'est plus étranger à la pensée de LAGRANGE que l'idée d'aligner des calculs "*pour le plaisir*" : en témoigne cette indication désolée qui ouvre la Première Section (De la résolution des équations du troisième degré) :

"C'est dans cet état ($x^3 + nx + p = 0$) que les équations du troisième

RÉSOLUTION ALGÈBRIQUE DES ÉQUATIONS

degré ont été d'abord traitées par Scipio FERREO et TARTAGLIA à qui l'on doit leur résolution; mais on ignore le chemin qui les y a conduits".

Or, ce parcours des différentes méthodes utilisées pour résoudre les équations dont il s'agit est de part en part un parcours critique, attaché à découvrir non seulement ce qui est essentiel aux méthodes diverses mais ce que l'on peut en attendre a priori par une étude qualitative : par exemple, §15 : "Voyons a priori, et indépendamment de la théorie de l'élimination que nous venons d'expliquer, la raison pourquoi cette méthode conduit directement à une réduite (*) du second degré, tandis que la méthode ordinaire mène à une réduite du sixième". Passons sur le fait (qui mériterait un développement en soi) que LAGRANGE utilise sans hésitation le calcul différentiel pour traiter de problèmes algébriques. Il conclut pour le troisième degré à l'abaissement nécessaire du degré de la réduite (§20).

Citons encore à l'appui de ce qui précède l'introduction de la section seconde (De la résolution des équations du quatrième degré) :

"Cette méthode (de Louis FERRARI — contemporain et même disciple de CARDAN) qu'on peut regarder comme la plus ingénieuse de toutes celles qui ont été inventées pour le même objet, a été adoptée par tous les Analystes qui ont précédé DESCARTES; mais cet illustre Géomètre a cru devoir lui en substituer une autre, moins simple à la vérité, et moins directe, mais à quelques égards plus conforme à la nature des équations."

Aux paragraphes 34-35-36, on retrouve le fil conducteur de la pensée de LAGRANGE :

"Voyons maintenant la raison pourquoi la méthode de DESCARTES conduit à une réduite du sixième degré..."

et plus haut,

"Telle est la méthode de DESCARTES pour les équations du quatrième degré. Il est vrai que cet Auteur suppose d'abord que les équations composantes soient représentées par ... — suivent des formes particulières par opposition aux calculs propres de LAGRANGE — mais il est naturel de croire qu'il n'a trouvé ces formules que par une analyse semblable à celle que nous venons de donner, comme on peut le voir dans le "commentaire" de SCHOOTEN et dans la lettre de HUDDE sur la réduction des équations. Ainsi, les principales remarques qu'on a faites sur la solution de FERRARI pourront s'appliquer aussi à celles de DESCARTES, sans qu'il soit nécessaire d'entrer là-dessus dans un nouveau détail; mais il est bon, de plus, d'examiner en particulier le principe de cette dernière solution et de chercher a priori les conséquences qui peuvent en résulter".

(*) L'astérisque renvoie au Glossaire.

Nous ne pouvons, dans le cadre de cet article, traiter en détail de la deuxième partie du Mémoire (c'est là une invitation non équivoque à d'autres études) : de ce volcan en activité, nous nous bornerons à cerner la démarche de LAGRANGE dans l'oscillation évidente entre la formulation d'une conjecture, le refus (**incompréhensible hors de "l'esprit du temps"**) d'admettre la possibilité d'un théorème d'impossibilité mais seulement la limite théorique **des méthodes jusque là employées**, et l'aboutissement de la réflexion en un résultat fondamental mais partiel, acte de naissance d'une théorie nouvelle, à l'aube d'une période de bouleversements fondamentaux auxquels LAGRANGE donnera sa totale adhésion **en revendiquant la nationalité française**; théorie nouvelle dont on sait qu'il reviendra à E. GALOIS d'écrire des pages décisives (mais qui, à la différence de LAGRANGE, devra l'accomplir dans le bruit et la fureur des luttes populaires pour la République, esquissant ainsi les traits d'une citoyenneté concrète : sur ce sujet auquel il faudra bien revenir nolens, volens, on trouvera quelques échos actuels à la fin de cet article).

Suivons LAGRANGE dans son introduction de la Troisième Partie du Mémoire. Evoquant les considérations de BEZOUT, il écrit :

"Ce savant Auteur pense à la vérité que cette réduite du cent-vingtième degré, regardée comme un équation du vingt-quatrième degré ne doit renfermer que les difficultés des degrés inférieurs au cinquième et ses raisons sont : ...

Mais cette conclusion, si j'ose le dire, me paraît un peu forcée, car j'avoue que je ne vois pas bien clairement ce qui pourrait empêcher que l'expression des racines de l'équation du vingt-quatrième degré dont il s'agit ne contînt encore des radicaux cinquièmes : du moins, il n'est pas démontré que cela ne puisse absolument avoir lieu; ainsi il pourrait bien arriver que cette équation du vingt-quatrième degré renfermât encore toutes les difficultés de l'équation proposée du cinquième degré; auquel cas, après avoir trouvé cette équation par des calculs très pénibles, on n'en serait que plus éloigné de la résolution de l'équation proposée.

Il résulte de ces réflexions qu'il est très douteux que les méthodes dont nous venons de parler puissent donner la résolution complète des équations du cinquième degré, et à plus forte raison, celle des degrés supérieurs. Et cette incertitude, jointe à la longueur des calculs que ces méthodes exigent doit rebuter d'avance tous ceux qui pourraient être tentés d'en faire usage pour résoudre un des Problèmes les plus célèbres et les plus importants de l'Algèbre.

Il serait donc fort à souhaiter que l'on pût juger a priori du succès que l'on peut se promettre dans l'application de ces méthodes aux degrés supérieurs au quatrième".

Enfin, à la Section Quatrième, LAGRANGE franchit le pas décisif conduisant à la formulation d'hypothèses précises et d'un théorème. Citons le § 86 :

"On a dû voir par l'Analyse que nous venons de donner ... que ces méthodes se réduisent toutes à un même principe général, à savoir :

RÉSOLUTION ALGÈBRIQUE DES ÉQUATIONS

trouver des fonctions des racines de l'équation proposée, lesquelles soient telles :

1) Que l'équation (ou les équations) par lesquelles elles seront données (les réduites), se trouvent d'un degré moindre que celui de la proposée, ou décomposables en équations de degré moindre.

2) Que l'on puisse en déduire aisément les valeurs des racines cherchées.

L'art de résoudre les équations consiste donc à découvrir des fonctions des racines, qui aient les propriétés énoncées; mais est-il toujours possible de trouver de telles fonctions? C'est sur quoi il paraît très difficile de pouvoir se prononcer en général."

Plus loin ,

"... il semble donc qu'on pourrait conclure de là par induction que toute équation, de quelque degré qu'elle soit, sera aussi résoluble à l'aide d'une réduite dont les racines ... Mais d'après ce que nous avons démontré on a, ce semble, lieu de se convaincre d'avance que cette conclusion se trouvera en défaut dès le cinquième degré. D'où il s'ensuit que, si la résolution algébrique des équations des degrés supérieurs au quatrième n'est pas impossible, elle doit dépendre ..."

Ayant noté au passage que c'est avec un prononcé dégoût que LAGRANGE envisage l'éventualité d'une telle possibilité, on retiendra de ce qui précède le raisonnement qualitatif profond par lequel LAGRANGE abandonne (non sans en avoir caressé l'espoir) l'idée d'un raisonnement par récurrence.

Suivons LAGRANGE dans l'aboutissement de l'exposé de son projet :

"Comme jusqu'ici nous n'avons fait que chercher ces sortes de fonctions a posteriori et d'après les méthodes connues pour la résolution des équations, il est nécessaire de voir maintenant comment il faudrait s'y prendre pour les trouver a priori et sans supposer d'autres principes que ceux qui suivent immédiatement de la nature même des équations : c'est l'objet que je me propose principalement dans cette Section.

Je donnerai d'abord des règles directes et générales pour déterminer le degré et la nature de l'équation d'où une fonction quelconque proposée des racines d'une équation de degré donné devra répondre; quoi que cette matière ait déjà été traitée par d'habiles Géomètres, je crois qu'elle peut l'être encore d'une manière plus directe et plus générale ...

Je ferai voir ensuite quelles sont les conditions nécessaires pour que l'équation dont il s'agit puisse admettre la résolution en supposant uniquement celle des équations des degrés inférieurs à celui de l'équation proposée; et je donnerai à cette occasion les vrais principes et pour ainsi dire la métaphysique de la résolution des équations

du troisième et du quatrième degré.”

(Cf. sur ce retour à l'objet particulier de la première phase, ce qui a été dit au début de cet article.)

3. — Aboutissement et nouveau départ.

Pour décrire maintenant la situation, il nous semble difficile de faire mieux que de citer l'analyse magistrale que l'on trouvera dans “*Galois Theory*” par Harold M. EDWARDS dans la collection “*Graduate texts in Maths*” (Springer Verlag), malheureusement disponible seulement en langue anglaise :

“La résolvante (*) d'une équation a pour LAGRANGE trois propriétés cruciales :

1) Elle est rationnellement exprimable en termes de racines de l'équation et de quantités connues (nombres rationnels, coefficients de l'équation, racines de l'unité ...).

2) Réciproquement, chacune des racines de l'équation peut s'exprimer rationnellement en termes de la résolvante et de quantités connues.

3) La résolvante est solution d'une équation résoluble.

LAGRANGE détermine quelles quantités satisfaisant la première condition satisfont la seconde et prouve l'important théorème qui suit; l'idée fondamentale de GALOIS peut alors s'exprimer en disant qu'il réalise l'existence dans tous les cas d'une résolvante satisfaisant aux deux conditions précédentes et que cette résolvante peut s'utiliser pour décrire la forme des solutions, assez complètement pour prouver qu'il n'existe pas de résolvante possédant les trois propriétés pour le degré ≥ 5 .”

Voici le théorème de LAGRANGE (§104 du Mémoire) :

“Donc

1°) Si l'on a deux fonctions quelconques t et y des racines x', x'', \dots de l'équation $x^\mu + mx^{\mu-1} + nx^{\mu-2} + px^{\mu-3} + \dots = 0$ et que ces fonctions soient telles que toutes les permutations entre les racines x', x'', \dots qui feront varier la fonction y , fassent aussi varier la fonction t , on pourra, généralement parlant, avoir la valeur de y en t et en m, n, p, \dots par une expression rationnelle, de manière que connaissant la valeur de t , on connaîtra immédiatement la valeur correspondante de y ; nous disons “généralement parlant” car s'il arrive que la valeur connue de t soit une racine double, triple, ... de l'équation en t , alors la valeur correspondante de y dépendra d'une équation carrée ou cubique, ... dont les coefficients seront des fonctions rationnelles de t, m, n, p, \dots ”

(*) L'astérisque renvoie au Glossaire.

RÉSOLUTION ALGÈBRIQUE DES ÉQUATIONS

Plutôt que de demander si **toutes les racines** peuvent s'exprimer rationnellement en termes de t et de quantités connues, LAGRANGE demande si une fonction y des racines peut s'exprimer en termes de t . Si tel est le cas, une permutation des racines n'altérant pas t , n'altèrera pas y ; le théorème dit que **cette condition évidemment nécessaire est "en général" suffisante** pour que y puisse s'exprimer rationnellement en termes de t .

Harold M. EDWARDS adjoint au théorème original de LAGRANGE le "*corollaire*" suivant :

"Si on peut trouver un polynôme t en les racines x', x'', x''', \dots avec la propriété que si $n!$ permutations différentes sont non seulement FORMELLEMENT distinctes (cela serait facile à accomplir : poser $t = x' + 2x'' + 3x''' + \dots$) mais aussi numériquement distinctes, alors, toute permutation des racines change la valeur de t et la condition du théorème de LAGRANGE est remplie par TOUS les polynômes y . Alors tout polynôme en les racines de l'équation s'exprime rationnellement en fonction d'une quelconque valeur numérique de t ."

Nous sommes, avec ce corollaire, déjà chez Evariste GALOIS.

Comme conclusion provisoire, indiquons le vaste chantier que constitue l'étude COMPARÉE des réflexions des différents auteurs succédant à LAGRANGE; donnons quelques pistes :

α) On peut exclure délibérément l'idée que CAUCHY pouvait **ne pas percevoir la portée du problème général**; voir pourtant ses allusions alambiquées dans le Mémoire du Journal de l'École Polytechnique (Sur le nombre de valeurs qu'une fonction peut acquérir, lorsqu'on y permute de toutes les manières possibles les quantités qu'elle renferme).

β) Pour ce qui est du **problème général**, voici une note incidente du grand K.F. GAUSS dans "*Recherches arithmétiques*, § 359" :

"On sait que tous les travaux des plus grands géomètres ont échoué contre la résolution générale des équations qui passent le premier degré, ou, pour mieux définir l'objet de la recherche, contre la réduction des équations complètes à des équations à deux termes, et il est à peine douteux si ce problème ne renferme pas quelque chose d'impossible, plutôt qu'il ne surpasse les forces actuelles de l'Analyse".

γ) Sujet connexe que celui des conditions comparées du travail scientifique (France, Allemagne, Italie) : Bibliothèques, accès aux documents, échanges, confrontations; pourvoir d'état et travail scientifique ... Qu'est-ce donc que les mathématiques modernes? Relisez et faites (re)lire LAGRANGE!...

Glossaire

Réduite :

Etant donnée une équation algébrique, LAGRANGE appelle réduite une équation algébrique de degré strictement inférieur à la précédente, obtenue par des substitutions algébriques et permettant de résoudre l'équation donnée par radicaux : pour l'équation du second degré, la réduite donne les solutions : $X = \sqrt{(s/2)^2 - p} + s/2$ $y = s - X$, pour le troisième degré, ($X^3 + px + q = 0$) on trouve $27a^6 + 27qa^3 - p^3 = 0$ (équation du second degré en a^3 où $X = a - b$ et $3ab = p$). La réduite de l'équation du quatrième degré s'exprime plus malaisément.

Le terme de "réduites" a disparu pour des raisons évidentes : les "réduites" des équations algébriques de degré ≥ 5 sont de degrés bien supérieurs à celui de l'équation donnée, sans bénéfice. Voir les développements de l'article.

Résolvante de Lagrange :

On se borne ici à l'exemple du degré troisième; contrairement à la "réduite", on peut ici généraliser, au moins en principe. Si x, y, z sont les racines de l'équation donnée, posons $t = x + \alpha y + \alpha^2 z$ où $\alpha^3 = 1$ ($\alpha \neq 1$). L'expression t peut prendre six valeurs, solutions d'une équation du 6^e degré $f(X) = (X - t_1) \dots (X - t_6) = 0$, dont les coefficients sont des quantités calculables à l'aide des seuls coefficients de l'équation donnée (les coefficients de f sont en effet symétriques en t , les t_i sont symétriques en les racines ...). Cette équation s'appelle la résolvante de LAGRANGE qui est soluble bien que de degré supérieur à l'équation donnée car c'est une équation quadratique en X^3 .

Post-scriptum Ante-scriptum

Nous proposons aux lecteurs de "L'Ouvert" la juxtaposition de deux textes : le premier est de Harold M. EDWARDS (op. cité) :

"The mathematical establishment ignored, mislaid, lost, and failed to understand his treatises. Meanwhile, he was persecuted for his political activities and spent many months in jail as a political prisoner. At the age of 20 he was killed in a duel involving, in some mysterious way, honor and a woman"⁽¹⁾

Le second est de Peter M. NEUMANN, The Queen's College Oxford England, dans *American Mathematical Monthly* N^o Juin 1986, où à l'occasion d'un commentaire critique sur le livre de Harold M. EDWARDS il écrit (traduction de l'anglais par l'auteur) :

"[POISSON et LACROIX] conclurent leur rapport en conseillant d'attendre que l'oeuvre complète de l'auteur soit à disposition avant de se

⁽¹⁾ Traduction approximative : La haute hiérarchie mathématique ignore, égara, perdit et ne comprit pas ses traités. Entre temps, il fut persécuté pour ses activités politiques et passa plusieurs mois en prison comme prisonnier politique. A vingt ans, il fut tué dans un duel impliquant de façon mystérieuse l'honneur et une femme.

former une opinion définitive, puisque l'auteur disait que sa proposition principale était partie d'une théorie plus générale, et qu'il était fréquent qu'une théorie complète soit plus facile à comprendre que des parties isolées ⁽²⁾; mais en l'état, la partie soumise à appréciation n'était pas en condition convenable (suitable state) pour pouvoir être recommandée à l'approbation de l'Académie.

Avec arrière pensée, on peut avoir le sentiment que ce rapport était éroné (wrong). Mais je ne peux penser ainsi : il me semble le modèle d'un bon refereeing. L'un de nous est-il sûr de ne pas réagir aujourd'hui de la même façon devant une semblable situation ? J'en doute : c'est un admirable rapport, sympathique mais ferme. Ce qui ne va pas, c'est qu'il a affaire à l'œuvre d'un homme exceptionnellement brillant et insupportable (awkward man). GALOIS n'avait pas de directeur de recherche qui lui aurait montré comment ses découvertes auraient dû être écrites proprement. De plus, GALOIS ne prenait pas facilement conseil. Un autre jeune mathématicien eût pris la critique à coeur, réécrit son ouvrage, l'aurait publié, et serait devenu célèbre.

GALOIS s'offensa, retourna à l'agitation polique, mourut jeune et devint célèbre."

Dans le manuscrit retourné par l'Académie, GALOIS découvrit une note de POISSON trouvant insuffisante la démonstration d'un lemme; GALOIS écrivit au sujet de cette note : "on jugera". En effet!

CONCOURS :

Le jeu du portrait

Nous proposons à la sagacité de nos lecteurs le jeu du portrait pour un objet mathématique. La première réponse correctement argumentée qui nous parviendra donnera à son auteur un abonnement gratuit d'un an à "L'Ouvert".

Si c'était un nombre?	Ce serait 2, 3 ou 4.
Si c'était un élément?	Ce serait la terre.
Si c'était un monument?	Ce serait la Kaaba.
Si c'était une ville?	Ce serait New-York.
Si c'était un personnage?	Ce serait Picasso ou Braque.
Si c'était une date?	Ce serait 1907.
Si c'était un jeu?	Ce serait le 421.
Si c'était un bijou?	Ce serait un diamant.

(²) (!! par POISSON, LACROIX, CAUCHY et d'autres.)