PARIS

Fiche pédagogique élaborée par le groupe
« Léo, langage, écrit, oral » de l'IREM de Paris

http://www.irem.univ-paris-diderot.fr/sections/leo/

Coordination : Christophe Hache

Version avril 2017

FORMULER, REFORMULER

Table des matières

-I- Positionnement général

Une part importante des expérimentations du groupe Léo concerne les activités de formulation et de reformulation[1] par les élèves de propriétés mathématiques, de définitions, de preuves.

Le lien entre la formulation et la façon de penser, entre parler (expression orale, écrite) et penser, est très fort. Dire ou écrire c'est une façon de penser le monde, de modifier, de transformer ses représentations et les représentations de ses interlocuteurs. Verbaliser différemment c'est aussi comprendre différemment, apprendre. Ainsi, parler et penser sont deux composantes indissociables de l'activité. Ce lien est un levier important dans les phases d'enseignement et d'apprentissage ; nous avons réfléchi à la façon de l'exploiter de façon plus forte à certains moments du cours de mathématiques. Nous présentons dans ce documents certains résultats issus de cette réflexion.

Les pratiques langagières des mathématiciens ont certaines spécificités. On peut souligner le lien particulier entre langue naturelle, symbolisme et formalisme.
La gestion des variables donne lieu, par exemple, à l'usage d'expressions ou de mots liés à la quantification (par exemple « s'écrire sous la forme », « à partir d'un certain rang », « quelconque », « fixé », « un », « tous ») dont le sens mathématique n'est pas toujours simple et n'est pas toujours univoque.
Les connecteurs « et » et « ou », mais aussi « si … alors … », les marqueurs de déduction (par exemple « donc », « car », « puisque ») ont des usages complexes et variés en français, dans un contexte mathématique s'ajoutent le sens et les usages liés aux connecteurs logiques.
Les mots eux-mêmes ont un rôle particulier : un objet mathématique est décrit par un (parfois plusieurs) mot, il est caractérisé par certaines propriétés, cette caractérisation, appelée définition dans le contexte du cours de mathématique, est très différente de la définition d'un mot dans dictionnaire par exemple (description des différents usages du mot).
Ces pratiques langagières sont présentes dès le début du collège. Leur appréhension, leur compréhension, leur usage n'est pas simple, et ne fait pas facilement l'objet d'un travail avec les élèves.

Pour un enseignant, avoir une attention particulière à ses propres pratiques langagières en classe est important… Pour avoir une attention à ses formulations en cours, mais aussi (surtout ?) pour anticiper et comprendre certaines incompréhensions des élèves. Il est aussi important d'avoir des outils de réflexion, et des outils de réflexion et de discussion avec les élèves sur ce point. Ces points ne seront abordés ici qu'indirectement.

Une des façons d'aborder cette complexité des pratiques langagières en cours de mathématiques est la sollicitation et le travail d'écrits intermédiaires : brouillons améliorés progressivement (relecture entre élèves, annotations de l'enseignant, réécriture, etc.), narrations de recherche, écrit de communications entre élèves, utilisation de l'oral, etc. Ce type de production a pour but de ménager une entrée et une appropriation progressive dans les contraintes du formalisme sous-jacent, dans les pratiques langagières propres aux mathématiciens, au cours de mathématiques.

Une approche directe et explicite des questions des usages langagiers (« Pourquoi utiliser telle formulation ? », « Que signifie telle expression ? » etc.) ne fait pas nécessairement entrer en jeu des écrits intermédiaires. On verra qu'une modalité de travail possible pour ouvrir une telle réflexion peut être portée par un travail (relecture, réécriture, échanges) sur des formulations des élèves (et de l'enseignant) avec les élèves.

1 Nous parlons de formulations et de reformulations pour souligner qu'il ne s'agit pas d'un simple travail d'expression (apprendre à trouver « la bonne formulation » par exemple), mais d'un travail de réflexion sur la façon dont les choses sont formulées : en passant par des relectures individuelles ou collectives, des réécritures individuelles ou collectives, en reprenant des expressions, des phrases ou des textes issus d'un travail en classe (exercice, cours), d'un manuel…

Nous présenterons ci-dessous plusieurs expérimentations, essentiellement au collège, à propos de la formulation et de la reformulation en mathématiques avec les élèves (formulation et reformulations de définitions, de propositions et de preuves). Les séances présentées partent de principes communs, mais ont été adaptées par chaque enseignant à ses classes, à ses habitudes, à ses contraintes. C'est un peu dans cette perspective que nous nous plaçons ici : présenter l'esprit dans lequel le travail est fait, l'organisation, les objectifs et les principes des expériences, pour donner à chacun la possibilité (et l'envie) de s'approprier les propositions présentées.

Notons ici une convergence avec le document ressource[2] « Mathématiques et maîtrise de la langue » (édité par le ministère en juin 2016 et qui a été écrit avec la participation du groupe Léo). D'autres documents officiels présentent une réflexion sur les questions liées à la langue : « Communiquer à l'écrit et à l'oral », « Raisonner », « Travail des élèves en mathématiques en dehors de la classe », etc.

-II- Formuler et reformuler, pourquoi ?

Lors des travaux de reformulation, l'objectif affiché est d'obtenir une formulation d'une partie du cours ou de la réponse à un exercice. Cette (re)formulation (il peut aussi y en avoir finalement plusieurs) fait consensus, ou au moins a été discutée collectivement. L'enseignant connaît la propriété à énoncer et est capable de juger si une formulation est acceptable, correspond aux façons usuelles de dire les mathématiques ou non (même s'il n'est pas toujours simple lors d'une première formulation de savoir s'il est possible que la discussion aboutisse à partir de cette base à quelque chose d'acceptable), mais il ne sait pas à l'avance la formulation exacte (ou les formulations) qui figurera (ou figureront) dans le cours.

Les objectifs plus larges et plus ambitieux ci-dessous, nous semblent fondamentaux, notamment si on les met en perspective avec l'impossibilité soulignée ci-dessus (?) de séparer penser et parler, représentation et formulation[3], etc. :
– Faire s'approprier aux élèves l'intention de formuler une proposition mathématique (ou définition, ou preuve), et plus généralement de dire ou d'écrire des mathématiques,
– Faire s'approprier aux élèves le droit de formuler ou de reformuler, ou de discuter la formulation d'une proposition mathématique, d'une définition, d'une preuve,
– Faire s'approprier aux élèves les contraintes de telles formulations et les exigences de clarté (induisant parfois ce que l'on pourrait qualifier de lourdeurs),
– Faire s'approprier aux élèves le contenu mathématique travaillé : chaque formulation ou reformulation (dite, écoutée ou lue) apporte un nouvel éclairage, de nouvelles représentations,
– Faire s'approprier aux élèves la structure d'une proposition (quantifications, contexte, prémisse, conclusion), d'une définition (caractérisation), d'une preuve,
– Apprendre aux élèves à s'écouter (soi même et à écouter les autres élèves et l'enseignant), à s'exprimer avec précision, à critiquer avec tolérance et objectivité. Le travail proposé est ainsi

2 Tous les documents officiels cités ici sont disponibles sur la page http://eduscol.education.fr/cid99696/ressources-maths-cycle.html (lien valide en septembre 2016)

3 Le théorème de Pythagore énonce par exemple une relation entre propriétés géométriques et propriétés métriques d'un triangle, on peut retrouver cette relation au sein même des formulations. On peut dire « le carré des longueurs des côtés », « l'aire du carré construit sur les côtés », on peut dire, pour aller vite, « le carré des côtés » ou « le carré de l'hypoténuse ». Les objets métriques et les objets géométriques sont liés, par les expressions utilisées couramment, par l'étymologie des termes, se côtoient ainsi également dans la formulation.

Autre exemple (cours de 5^e, calculs avec parenthèses) : « Dans une expression avec parenthèses, on effectue d'abord les calculs entre parenthèses en commençant par les parenthèses les plus intérieures ». La formulation mêle à la fois l'énoncé de la convention lié à l'usage des parenthèses (et donc à l'écriture linéaire du calcul), une allusion à la chronologie du calcul (« d'abord », « commencer ») et une allusion à une représentation plus spatiale (« intérieur », où l'on voit le parenthésage comme la trace de petites boites imbriquées).

largement collectif (petits groupes, synthèses, interaction élèves – professeur…) de façon à dépasser la dimension individuelle du langage (ou la simple relation entre chaque élève et l'enseignant).

-III- Formuler, reformuler une propriété mathématique

La plupart des expérimentations que nous regroupons sous un titre « formulations / reformulation » à propos des propriétés mathématiques suit un schéma proche du suivant :
– découverte expérimentale d'une propriété (par exemple une propriété géométrique mise en évidence sur Geogebra),
– formulation d'une conjecture (la conjecture correspond à la description de ce qui est constaté, de la conclusion du théorème potentiel ou seulement d'une partie saillante de cette conclusion ; la description du contexte, les prémisses, étant en général laissées temporairement de côté dans la formulation d'une conjecture),
– confirmation par l'enseignant du fait que cette conjecture est justifiée et correspond bien à une proposition mathématique vraie ; éventuellement mise en place d'une preuve de cette propriété (la preuve peut aussi être travaillée après la formulation),
– travail en classe sur la formulation de la proposition mathématique correspondante,
– suite de la séquence (écriture dans le cours, éventuellement preuve, exercices, etc.).

La succession des étapes, leur durée sont adaptées par l'enseignant à chaque mise en œuvre en fonction de ses contraintes de temps, de classe, etc. Certaines expérimentations ont duré sur plusieurs séances, d'autres ont été plus courtes. Le temps passé va souvent décroissant : ce type de réflexion et de travail est un peu nouveau au départ et chacun doit y trouver ses repères, après plusieurs itérations les choses peuvent être plus rapides, elles peuvent aller jusqu'à s'intégrer naturellement dans le déroulement du cours (l'énoncé d'une proposition nouvelle, ou le rappel d'une ancienne proposition mathématique amenant une discussion sur sa formulation). Certains paramètres sont à déterminer et peuvent évoluer au cours du temps, notamment le recours à l'écrit, le type d'écrit.

*1. Séance de TP, formulation d'une conjecture, formulation d'un théorème, exemples avec Pythagore en 4^e^*

Description de trois séances. La troisième et la cinquième travaillent la formulation. Ci-dessous les grandes lignes du contenu des séances relatives au travail sur le théorème de Pythagore.

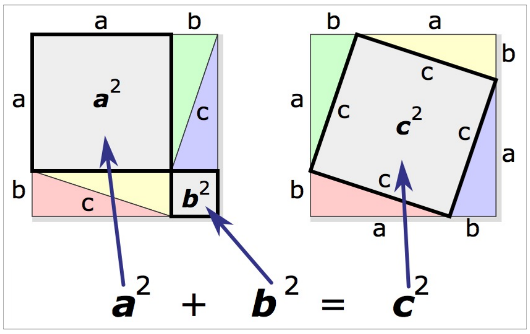
1.1 Une activité introductive appuyée sur Geogebra.

De façon très résumée, l'enseignante construit (et vidéo-projète) un triangle ABC rectangle en A, fait afficher les longueurs des trois côtés, et les résultats des deux calculs suivants : BC^2 et $AC^2 + BA^2$. Elle déplace ensuite les points.

Les élèves remarquent ce qui change (les longueurs des côtés, les résultats des calculs affichés dans le tableur) et ce qui ne change pas (le triangle reste rectangle, les résultats des calculs affichés dans le tableur sont égaux).

À l'issue de cette activité, on écrit la conjecture « Quelle que soit la position des points A, B et C, il semble que BC^2 et $AC^2 + BA^2$ restent égaux ».

1.2 Preuve du théorème de Pythagore.



Pour information, la preuve est celle, classique, basée sur ce découpage ci-contre.

La séance est laborieuse pour la classe. Les variables à introduire sont nombreuses, la nécessité de prouver que le polygone « c^2 » est un carré n'est pas évidente.

1.3 Formulation

La séance suivante débute sur un travail ayant pour objectif de trouver une formulation du théorème de Pythagore pour le cours : « que va-t-on écrire dans le cours ? ». Le travail est essentiellement mené à l'oral, l'enseignante écrit au tableau la suggestion d'un élève, puis modifie cette phrase en fonction des remarques qui sont faites (par elle et / ou par les élèves). L'échange dure environ une demi heure.

La séance n'est pas enregistrée, nous reconstituons une suite des formulations proposées pendant la séance. Les prises de parole sont nombreuses.

La première formulation qui ressort est la formulation « en français » : « Dans un triangle rectangle, les côtés perpendiculaires au carré sont égaux à l'hypoténuse au carré ». Suite à une question d'un élève la phrase devient : « Dans un triangle rectangle, **la somme** des côtés perpendiculaires au carré est égale à l'hypoténuse au carré ».

L'enseignante suggère « côtés de l'angle droit » au lieu de « côtés perpendiculaires ». On obtient alors : « Dans un triangle rectangle, la somme des côtés **de l'angle droit** au carré est égale à l'hypoténuse au carré ».

L'enseignante souligne l'ambiguïté suivante : « Est-ce la somme qui est au carré ou chacun des côtés de l'angle droit ? ». Elle questionne les élèves à propos des deux énoncés suivants : « Calculer 4 au carré » et « Calculer le carré de 4 ». La phrase devient : « Dans un triangle rectangle, la somme **des carrés** des côtés de l'angle droit est égale au carré de l'hypoténuse ».

Un élève dit « C'est les longueurs des côtés ». On obtient alors « Dans un triangle rectangle, la somme des carrés **des longueurs** des côtés de l'angle droit est égale au carré **de la longueur** de l'hypoténuse » (1).

Commentaire immédiat d'une élève : « C'est long ! »

Question d'une autre élève : « Une propriété, ça ne s'écrit pas avec 'si' et 'alors' ? ».

Remarque d'une autre élève : « On ne pourrait pas faire un schéma ? »

À la question de la longueur un autre élève suggère d'« écrire en mathématique ».

On arrive alors à une autre formulation accompagnée d'une figure (un triangle ABC rectangle en A, posé sur le coté $[AB]$, l'angle droit est codé) : « Si un triangle ABC est rectangle en A, alors on a : $BC^2 = AB^2 + AC^2$ » (2).

Et on obtient également une troisième formulation (utilisation de « si … alors … ») : « Si un triangle est rectangle, alors la somme des carrés des longueurs des côtés de l'angle droit est égale au carré de la longueur de l'hypoténuse » (3).

Les formulations (1), (2) et (3) sont finalement notées dans le cours.

2. *Deuxième exemple autour du théorème de Pythagore (4e), maths / français.*

Les élèves ont découvert la propriété de Pythagore avec une activité sur logiciel de géométrie dynamique : ils ont calculé les aires des carrés construit sur les côtés d'un triangle rectangle, avec le tableur, ils calculent la somme des carrés des longueurs des côté de l'angle droit et la compare avec la longueur de l'hypoténuse. Ils sont ainsi amenés à écrire une première version du théorème de Pythagore.

Chaque élève écrit sur son cahier sa conjecture. Dans les faits, peu d'élèves ont produits. Lors d'un premier bilan pendant lequel les élèves expliquent leur difficulté, nous avons l'occasion de préciser certains points de vocabulaire (conjecture, théorème, vocabulaire du triangle rectangle). Le professeur montre aussi un contre-exemple dans le cas où le triangle n'est pas rectangle. Il suggère aux élèves de commencer s'ils veulent leur phrase par « dans un triangle rectangle ». Chaque élève reprend alors cinq minutes pour modifier sa phrase ou en écrire une nouvelle puis le professeur note aux tableaux toutes les phrases obtenues :

Dans un triangle rectangle,
1 - il faut calculer les côtés de l'angle droit avec l'hypoténuse
2 - si on additionne l'hypoténuse au carré et du côté de l'angle au carré alors l'autre côté a la mesure
3 - si on additionne les côtés égal au côté de l'angle droit au carré, on obtient la mesure de l'hypoténuse
4 - on doit calculer les côtés de l'angle droit avec l'hypoténuse et puis on additionne tous les côtés du carré
5 - on doit calculer au carré l'égal du côté de l'angle droit
6 - on additionne au carré les côtés adjacents qui seront égaux à l'hypoténuse
7 - quand on additionne l'angle droit, c'est égal à l'hypoténuse
8 - on additionne les côtés carré de l'angle droit, on remarque qu'il est égal à l'hypoténuse
9 - si on additionne l'hypoténuse au carré, c'est égal aux côtés de l'angle droit additionnés au carré
10 - l'hypoténuse est si on additionne les côtés carré de l'angle droit alors ils sont égaux.
11 - lorsqu'on additionne les côtés de l'angle droit au carré, c'est égal à l'hypoténuse
12 - on additionne les côtés de l'angle droit qui est égal à l'hypoténuse au carré
13 - les côtés de l'angle droit sont additionné au carré et qui doit être égal à l'hypoténuse

Les phrases sont discutées une par une, un code couleur est adopté :
En rouge : les morceaux ou phrases que nous éliminons en expliquant pourquoi
En jaune : les phrases qui sont correctes dans le sens mais qui doivent être reprises dans la syntaxe
En rose : les connecteurs logiques ou conjonctions que nous pourrons réutiliser dans la synthèse.

La séance est reprise ensuite par l'enseignant de français

Les phrases ainsi écrites et annotées sont transmises au professeur de français dans le but de produire une réécriture. Formulation obtenue : « Dans un triangle rectangle, la somme des carrés des côtés de l'angle droit est égale au carré de l'hypoténuse. »

3. *Séance de TP, formulation d'une conjecture, formulation d'un théorème (4e)*

Beaucoup de nos expérimentations ont été menées autour du théorème de Thalès ou de ceux liés à la droite des milieux en 4e.

Premier exemple

Une première séance est consacrée à une expérimentation. Pendant une première partie de la séance, l'enseignante construit une figure Geogebra et la manipule (éventuellement en suivant les demandes

des élèves), les élèves proposent des conjecture (cours dialogué), certaines des conjectures sont retenues et écrites dans le cours. L'enseignante annonce que ces conjectures correspondent effectivement à une proposition mathématique que l'on peut prouver. La fin de la séance laisse le temps aux élèves d'écrire une première formulation de la proposition. Les écrits sont ramassés par l'enseignante. Lors de la séance suivante, l'enseignante a sélectionné certaines des formulations des élèves, les recopient et projette le document au tableau, au tableau et une discussion est menée sur chacune d'elle en vue de choisir les formulations qui apparaîtront dans le cours, les modifications et commentaires sont faits sur le document projeté.

Nous présentons ci-dessous des traces d'un tel débat.

Les trois formulations encadrées sont celles qui apparaissent finalement dans le cours, les commentaires sont en rose, les mots surlignés le sont pendant la discussion (mots liés à la structure logique de la proposition).

1) Si deux droites parallèles ~~se~~ coupent ~~chacune par~~ deux demi-droites qui ont ~~le même point de départ~~ la même origine, alors les triangles formés ont la même forme.

2) Si deux triangles ont la même forme, alors les longueurs des côtés des triangles sont proportionnelles.

→ vrai mais ce n'est pas la propriété qu'on cherche à écrire

3) Si les longueurs de deux triangles sont proportionnelles, alors ces deux triangles ont la même forme.

→ il faudrait écrire "les longueurs des côtés …"
→ vrai mais ce n'est pas la propriété qu'on cherche à écrire
→ c'est la réciproque de la propriété 2)

4) Lorsque deux demi-droites de même origine possèdent deux points sur chacune formant une droite ayant une parallèle passant par un point d'une des demi-droites …

→ pas très clair...

5) Si deux triangles ont les angles de même mesure, alors les longueurs des côtés des deux triangles sont proportionnelles.

→ vrai mais ce n'est pas la propriété qu'on cherche à écrire

6) Si les longueurs des côtés de deux triangles sont proportionnelles, alors ils ont les angles de même mesure.

→ vrai mais ce n'est pas la propriété qu'on cherche à écrire
→ c'est la réciproque de la propriété 5)

7) Quand il y a deux droites parallèles de même origine et qu'une droite passant par deux points alignés sur la droite et reliant une autre droite coupée par deux demi-droites …

→ pas très clair...

8) Si on a deux droites parallèles passant par des points de deux demi-droites ayant la même origine, alors les deux droites parallèles le resteront peu importe la figure.

→ entre le "si" et le "alors" : pas très clair...
→ c'est évident : si on a deux droites parallèles, alors elles resteront paralèles peu importe la figure

9) Si dans deux triangles les bases sont parallèles, alors les longueurs des côtés seront proportionnelles.

→ conditions incomplètes (contre-exemple dessiné) : "il faut l'alignement des points sur les demi-droites" ou "il manque les demi-droites"

10) Quand deux droites parallèles ~~passent par~~ coupent deux demi-droites de même origine, alors les longueurs des côtés des deux triangles ainsi formés ~~que forment la première et la deuxième droite parallèles~~ sont proportionnelles.

11) Si deux points placés sur deux demi-droites dont le point d'origine est commun forment une droite elle-même parallèle à une droite formée par deux points (un sur chaque demi-droite), alors les deux triangles que forme chacune avec le point d'origine sont des agrandissements-réductions l'un de l'autre.

→ pas très clair... mais ça a l'air d'être vrai !

12) Si deux droites parallèles de même origine ont chacune deux points alignés étant relié aux mêmes points sur l'autre demi-droite et si les deux droites obtenues sont parallèles alors on obtient deux triangles qui ~~semblent~~ proportionnels.

→ pas très clair...
→ enlever "semblent" : ce n'est pas une conjecture, c'est une propriété

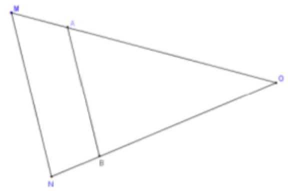
13) Si deux droites sont parallèles à deux autres et forment deux triangles, alors les longueurs des côtés des deux triangles sont proportionnelles.

→ entre le "si" et le "alors" : pas très clair … et il manque les demi-droites

14) Les longueurs des triangles sont proportionnelles car les deux droites qui passent par une même droite ont toutes les deux le même sommet et les mêmes côtés donc si la base change ce n'est pas un problème.

→ ça ne ressemble pas à l'énoncé d'une propriété, mais plutôt à la réponse dans un exercice (une justification pour répondre à une question".
→ différence entre "si" … "alors" et "on a" … "donc" ou "car".

15) Dans une telle situation :



Si les deux ~~demi-~~droites (MN) et (AB) sont parallèles, alors les longueurs des côtés des ~~les deux triangles~~ OAB et OMN sont proportionnelles.

Même travail avec une autre classe :

1) Si deux droites ~~passant par~~ coupant deux demi-droites de même origine sont parallèles ~~les droites formant les deux côtés des deux triangles sont parallèles entre elles~~, alors ~~les longueurs d'~~ l'un des deux triangles formés ~~triangle sont~~ est un ~~l'~~agrandissement ~~des longueurs~~ de l'autre triangle.

On obtient la formulation suivante :

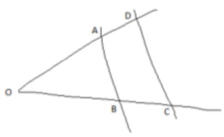
Si deux droites coupant deux demi-droites de même origine sont parallèles, alors l'un des deux triangles formés est un agrandissement de l'autre triangle.

2) Le triangle ODC est un agrandissement du triangle OAB car (AB) et (DC) sont parallèles sur deux mêmes droites sécantes.

→ cela ressemble à la réponse que l'on pourrait donner dans un exercice, pas à une propriété
→ différence entre "si" … "alors" et "on a" … "donc" ou "car".

On obtient la formulation suivante :

Quand les droites (AB) et (DC) sont parallèles, (alors) le triangle ODC est un agrandissement du triangle OAB.



3) Si les longueurs des côtés des deux triangles sont proportionnelles alors le triangle OMN est une réduction ou un agrandissement de OAB.

→ quels triangles ? Où sont les points O, M, N, B et A ?

4) Lorsque deux droites ~~passant par~~ coupant deux demi-droites de même origine sont parallèles, alors les longueurs des côtés des deux triangles obtenus sont parallèles.

5) Si deux droites parallèles ~~passant par~~ coupent deux demi-droites ayant ~~le même point d'~~ la même origine, alors les triangles ~~formés~~ obtenus sont ~~indéformables~~ de même forme ~~même si on bouge les demi-droites~~.

On obtient la formulation suivante :

Si deux droites parallèles coupent deux demi-droites ayant la même origine, alors les triangles obtenus sont de même forme .

Dans une troisième classe les productions des élèves étaient moins nombreuses, après relectures et modifications, elles ont été toutes retenues pour le cahier de cours (exceptée la réciproque).

Si deux droites parallèles ~~sont sur~~ coupent deux ~~autres~~ demi-droites de même origine ~~O~~ alors ~~cela veut dire qu'il y aura un agrandissement du triangle d'origine~~ l'un des triangles formés est un agrandissement de l'autre.

Si deux demi-droites ont la même origine et sont coupées par deux droites parallèles alors l'un des triangles formés est un agrandissement de l'autre.

Si les longueurs des côtés de deux triangles sont proportionnels et que l'un est un agrandissement de l'autre, alors les droites sont parallèles.

→ C'est une sorte de réciproque de la propriété qu'on cherche à écrire.

Si on a deux demi-droites qui ont ~~le même point~~ la même origine et qu'elles sont coupées par deux droites parallèles alors elles forment deux triangles qui ont la même ~~mesure d'angle~~ forme.

Dans le cahier l'enseignante a ajouté une cinquième présentation du théorème de façon à donner une formulation :

– n'utilisant pas le « si … alors … »,

– explicitant le lien avec la proportionnalité.

A chaque fois qu'on a la situation suivante :
- un triangle ABC
- un point M qui appartient à la demi-droite [AB)
- un point N qui appartient à la demi-droite [AC)

On peut dire « lorsque les droites (BC) et (MN) sont parallèles, alors les longueurs des côtés des triangles ABC et AMN sont proportionnelles ».

Deuxième exemple

En 4e les élèves doivent travailler trois propriétés de « la droite des milieux » dans un triangle. Un travail similaire au précédent a été mené successivement sur chacune des trois propriétés. Il faut souligner qu'au fur et à mesure des travaux de (re)formulation, le premier jet des élèves évolue : plus nombreux sont les élèves qui écrivent spontanément des formulations correctes, en utilisant des tournures de phrases ou un vocabulaire « plus mathématiques ». Lors des premières séances, le temps passé à expliquer ce qui est attendu est plus important, il faut que les élèves entrent dans ce travail inhabituel, osent écrire. Ensuite, les consignes ont de moins en moins besoin d'être rappelées : elles sont intégrées. Les élèves savent ce que l'on va faire quand l'enseignante dit « essayer de formuler la propriété dont on vient d'écrire la conjecture ».

Les élèves s'habituent à ce type de travail : il est clair qu'il y a plus de premiers jets "corrects" en fin d'année qu'au tout début. Et par ailleurs, une tâche de (re)formulation prend de moins en moins de temps au fur et à mesure que l'année avance.

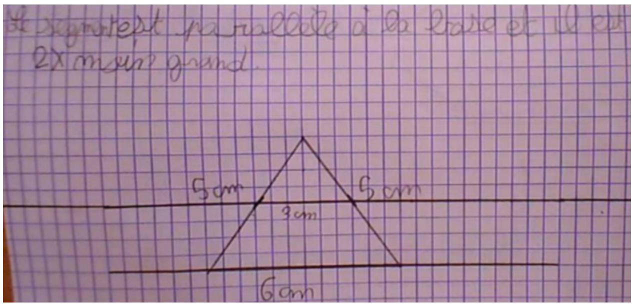
Troisième exemple

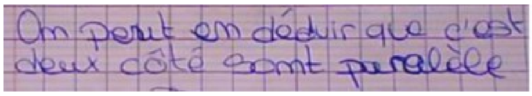
Le travail est réparti sur plusieurs séances (sans occuper l'ensemble du temps de chaque séance).

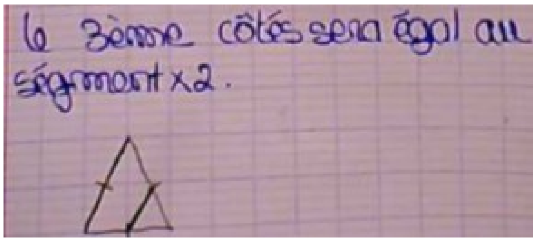
Pendant une première séance les élèves ont une activité sur Geogebra pour conjecturer les propriétés liant parallélisme et milieux des côtés dans un triangle. Le but pour les élèves est d'énoncer une conjecture sur la figure manipulée (« que se passe-t-il quand je déplace les points A, B et C sur la figure ? ») et une conjecture « générale » (« sans nommer les points A, B et C »). L'enseignant termine la séquence sans valider les conjectures.

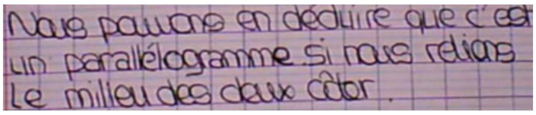
Une seconde séquence commence par un travail rapide (séquence instituée par l'enseignant, très proche des « questions flash ») : les élèves doivent écrire une réponse courte à la question « Étant donné un triangle et les milieux de deux côtés, que peut-on en déduire ? ». L'idée est de leur faire reformuler leur précédente conjecture. Quelques productions sont projetées et la classe doit y réagir, échanger pour les améliorer à l'oral. Les élèves doivent ensuite se mettre d'accord en groupe sur au moins une formulation.

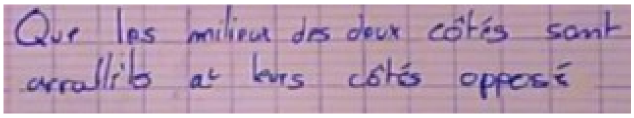
Exemples de réponses individuelles :





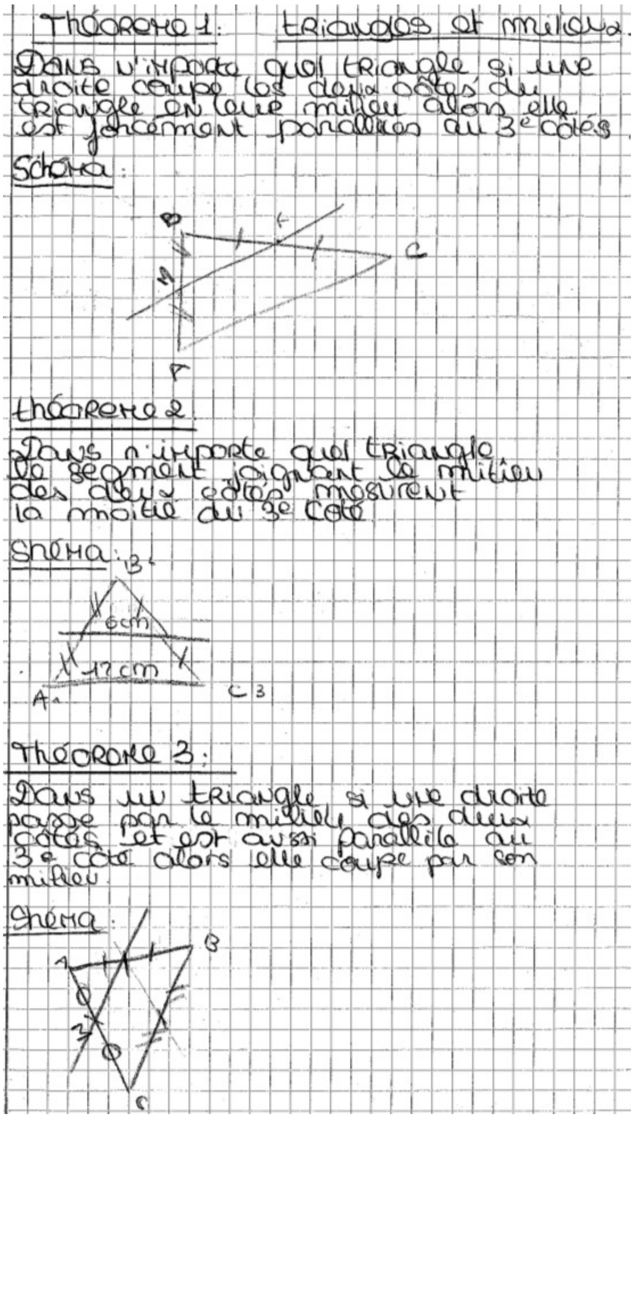


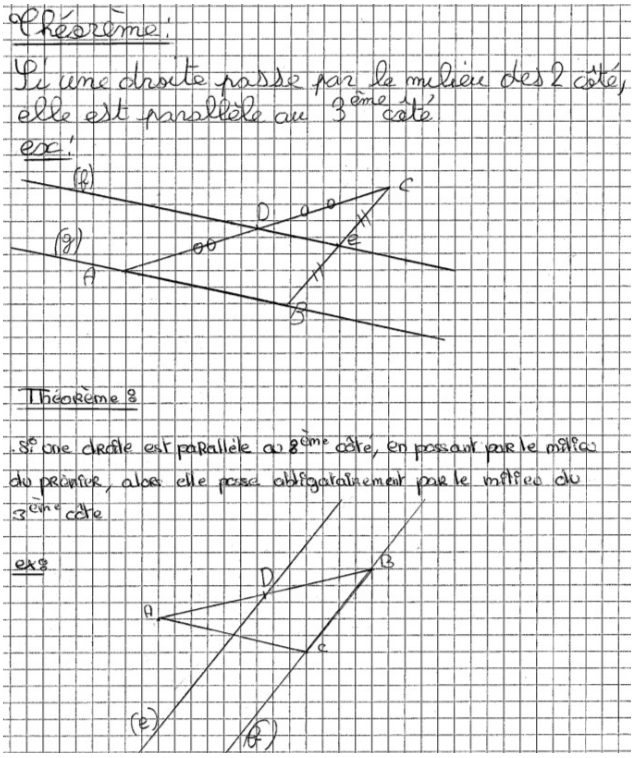


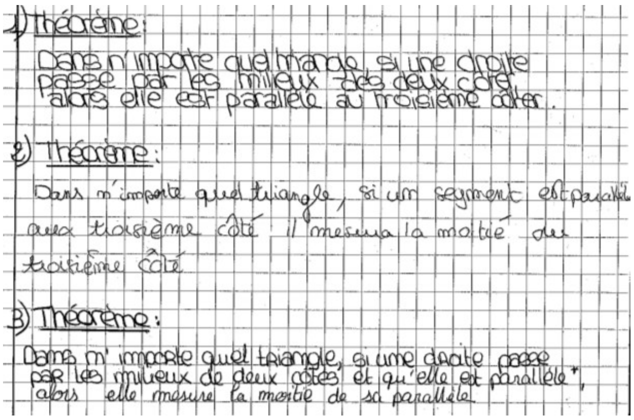


Pendant une troisième séance le théorème est inscrit dans le cahier de leçon (formulation élaborée à partir des formulations des élèves).

Enfin pendant une quatrième séance, un travail écrit est proposé en groupe (30 minutes) : il est demandé aux élèves de reformuler les théorèmes, sans l'aide du cahier. Ce travail de groupe permet aux élèves de retravailler la formulation des théorèmes (travail du vocabulaire notamment).



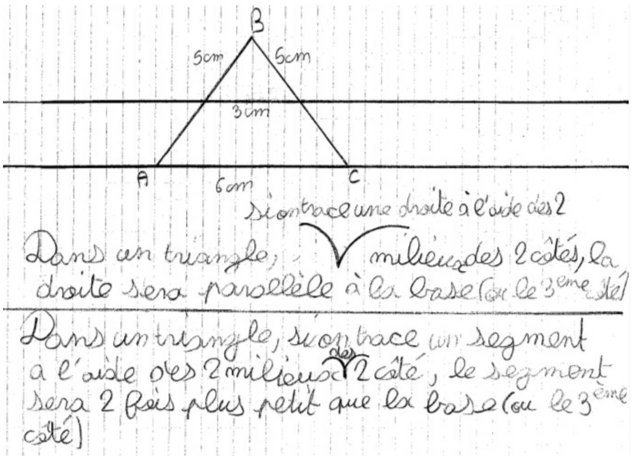




1) Théorème :
Dans n'importe quel triangle, si une droite passe par les milieux des deux côtés alors elle est parallèle au troisième côter.

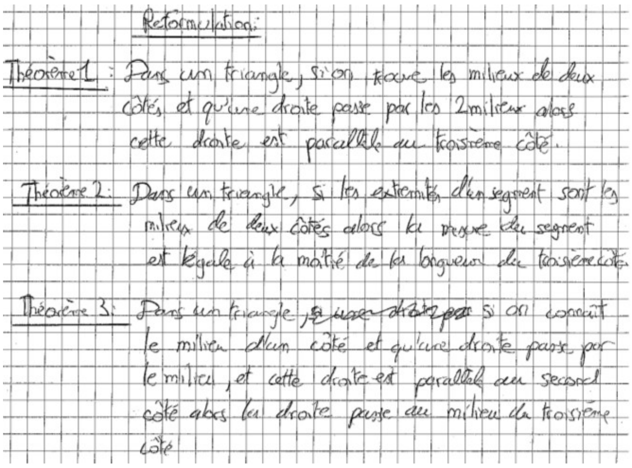
2) Théorème :
Dans n'importe quel triangle, si un segment est parallèle au troisième côté il mesura la moitié du troisième côté

3) Théorème :
Dans n'importe quel triangle, si une droite passe par les milieux de deux côtés et qu'elle est parallèle*, alors elle mesure la moitié de sa parallèle



Dans un triangle, si on trace une droite à l'aide des 2 milieux des 2 côtés, la droite sera parallèle à la base (ou le 3ème côté)

Dans un triangle, si on trace un segment à l'aide des 2 milieux des 2 côté, le segment sera 2 fois plus petit que la base (ou le 3ème côté)



Reformulation :

Théorème 1 : Dans un triangle, si on trace les milieux de deux côtés et qu'une droite passe par les 2 milieux alors cette droite est parallèle au troisième côté.

Théorème 2 : Dans un triangle, si les extrémités d'un segment sont les milieux de deux côtés alors la longueur du segment est égale à la moitié de la longueur du troisième côté.

Théorème 3 : Dans un triangle, ~~si une droite par~~ si on connait le milieu d'un côté et qu'une droite passe par le milieu, et cette droite est parallèle au second côté alors la droite passe au milieu du troisième côté

Ce travail en étapes successives (construction et visualisation sur Geogebra, différentes formulations à l'oral et à l'écrit, débat autour de ces formulations, institutionnalisation puis reformulations en groupes) permet aux élèves de travailler le sens de ces trois théorèmes et d'intègrer la nécessité d'un vocabulaire précis et commun à l'ensemble de la classe.

4. Exemple hors géométrie, écriture par les élèves (5e) des modalités d'addition des nombres relatifs.

Déroulement :

- Les nombres relatifs ont été introduits en première partie d'année (introduction, repérage, comparaison). Il est arrivé pendant l'année qu'un calcul du type « 15 – 17 » soit introduit dans des exercices de calcul mental sans que soit souligné sa présence… et sans que ça pose réellement de problème ;
- La séance débute par du calcul mental. Deux calculs ont été insérés : « 0 – 5 » et sur « 5 + -5 ». Une petite discussion est initiée autour de la question « pourquoi les nombres négatifs ? ».
- Exercices de calculs avec décompositions (6 + -5 = 1 + 5 + -5 = 1 + 0 = 1),

- Activité « qui perd gagne » (voir alternative en annexe page 33) :

Activité

Théo joue sur son téléphone portable à un jeu qui lui permet de gagner ou de perdre des SMS. Il en a déjà gagné beaucoup. Il fait deux parties par jour. Chaque soir, il complète un tableau de ses gains et ses pertes.

1) Compléter le tableau ci-dessous.

	1ère partie	2ème partie	Bilan	Autre écriture
1er jour	Gagne 10	Perd 3	Gagne 7	(+10) + (-3) ou 10 + (-3)
2ème jour	Perd 11	Gagne 7		
3ème jour	Perd 8	Perd 7		
4ème jour	Gagne 10	Gagne 5		
5ème jour	Gagne 10	Perd 5		
6ème jour	Gagne 7	Perd 7		

2) Compléter le tableau ci-dessous en utilisant les termes « perd » et « gagne » :

		Bilan	Autre écriture
(+5) + (-3)	gagne 5 et perd 3	Gagne 2	(+2)
(-3) + (+2)			
(-5) + (-4)			
8 + (-3)			
9 + (-12)			
(-8) + 5			

3) Effectuer les calculs suivants :

a. (-6) + (+2) c. (+7) + (-2) e. (-12) + (-15) g. (-20) + 13

b. (-4) + (-3) d. (– 8) + (+6) f. (-7) + 16 h. 17 + (-28)

4) A partir du travail précédent, rédiger une méthode pour :

– additionner deux nombres négatifs ;

– additionner un nombre positif et un nombre négatif

- En fin de séance chaque élève écrit une description de ce qu'il faut faire pour additionner deux nombres négatifs. Exemples de textes d'élèves :

Pour additioner un nombre positif a un nombre regatif on fait le nombre positif moin le nombre negatif.

Pour additionner 2 nombres relatifs, on soustrait au nombre positif le nombre négatif.

Pour additioner 2 nombre negatif on doit les additioner normalemant mais après mettre un "–" devant.

Si le nombre positif est plus grand que le nombre négatif alors le resultat sera un nombre positif.

Si le nombre negatif est plus grand que le nombre positif alors le resultat sera un nombre négatif.

Pour additioner un nombre négatif et un nombre positif il faut prendre le nombre positif pour soustraire ce nombre par le nombre négatif

On décompose le plus grand nombre en 2 parties pour que l'une d'elle soit égale à l'autre nombre additionné. On trouve ~~le~~ zéro, puis on soustrait ou additionne l'autre nombre.

On voit dans ces exemples que les nombres relatifs évoqués ne semblent être que des nombres entiers naturels accompagnés d'un « signe » dans leur écriture (et d'un adjectif dans leur désignation orale : « relatif », « positif » ou « négatif »), le signe permettant notamment ici de les désigner confortablement, mais n'en fait pas (encore) des éléments d'un nouvel ensemble de nombres (la phrase « si le nombre négatif [celui que l'on reconnaît parce qu'il est accompagné du signe « - »] est plus grand que le nombre positif [celui qui n'a pas de signe ou un signe « + »]… » parle bien de nombres entiers naturels.

• L'enseignant a récupéré les textes et sélectionné quatre des phrases pour la séance suivante (elle en ajoute une de sa composition, la dernière dans la liste). Les cinq formulations choisies, comme celles données en exemple ci-dessus, sont grammaticalement correctes et comportent imprécisions mathématiques.

• Lors de la séance suivante chaque formulation (de la liste de cinq) est discutée collectivement et modifiée. Les élèves sont finalement invités à choisir une des cinq formulations et à la recopier dans leur cahier sous le titre « Formulation trouvée par les élèves ».

Les cinq formulations travaillées :

> Formulation 1 : Pour additionner 2 nombres négatifs, on fait une addition normale puis on rajoute « - » devant le résultat.
>
> Formulation 2 : Pour additionner 2 nombres négatifs, il faut les additionner comme si ils étaient positifs puis on prend le résultat et on met « -» devant.
>
> Formulation 3 : Pour additionner 2 nombres négatifs, on enlève le « -» et on additionne normalement. Quand on a fini l'addition, on remet le signe « - » devant la somme obtenue.
>
> Formulation 4 : Pour additionner 2 nombres négatifs, il faut les additionner et rajouter le signe « -» ce qui signifie que c'est un nombre négatif.
>
> Formulation 5 : La somme de deux nombres négatifs est toujours un nombre négatif. Pour la calculer, on additionne leur partie numérique.

Remarque : aucun élève ne choisit la formulation n°5 insérée par l'enseignante.

Le même travail est fait pour l'addition d'un nombre négatif et d'un nombre positif, pour ce point-là les quatre formulations sont collées dans le cahier de cours.

> Formulation 1 : Pour additionner un n ombre négatif et un nombre positif, on peut les soustraire comme s'ils étaient positifs, puis on rajoute le signe qu'il faut (+ ou -).
>
> Formulation 2 : Si le nombre positif est plus grand que le nombre négatif, alors le résultat sera un nombre positif. Si le nombre négatif est plus grand que le nombre positif, alors le résultat sera un nombre négatif.
>
> Formulation 3 : Pour additionner un nombre positif et un nombre négatif, il faut faire le positif moins le négatif. Ex : $3 + (-2) = 3 - 2 = 1$
>
> $17 + (-18) = 17 - 18 = -1$
>
> Formulation 4 : Pour additionner un nombre positif et un nombre négatif, on décompose le nombre le plus grand. Ex : $-17 + 5 = -5 + (-12) + 5 = -12$

5. *Élaboration de courtes vidéos par les élèves (6^e et 4^e)*

Amener les élèves à s'approprier les formulations du cours n'est pas chose facile. Cela permet pourtant un travail intéressant et une appropriation des propriétés énoncées. L'expérience a été menée au Collège Colette Besson à Paris (20^e arrondissement) en classe de 6^e (parallèles et perpendiculaires) et de 4^e (Droites des milieux, et opérations sur les fractions) : l'enseignante a demandé aux élèves de réaliser un court film présentant une propriété du cours.

Le travail est fait à la fin du chapitre. Les vidéos sont donc une forme de bilan de savoir.

Les élèves, sont répartis en groupes. En 6^e les groupes d'élèves ont été fait en fonction de leur niveau (à partir de la dernière évaluation par compétence des élèves, cette classe de 6^e est évaluée par compétences) de façon à ce que les élèves qui n'avaient pas bien compris une notion travaillent sur celle-ci (Rq : les groupes qui maitrisaient mieux les notions ont travaillé sur la mise en image d'un poème). La classe de 4^e fonctionne en îlots, les élèves ont travaillé sans modification de la composition des groupes.

Les élèves ont eu une heure pour concevoir et réaliser la vidéo sur un thème donné par le professeur. Nous avons commencé à filmer environ dix minutes avant la sonnerie afin que tous les groupes aient eu le temps d'être filmé. C'est l'enseignante qui a filmé.

Les élèves avaient à disposition des post-it, des feuilles de couleurs et des feutres. Ils pouvaient utiliser leurs cahiers, leur manuel et tout support de leur choix. L'enseignante leur a conseillé d'écrire le texte qu'ils allaient dire dans la vidéo.

Les vidéos sont disponibles en ligne :
http://www.irem.univ-paris-diderot.fr/articles/reformulation_en_video

6. *Séance après cours, tri de formulations, reformulation de propriétés mathématiques (6^e)*

La séance décrite s'insère dans un dispositif particulier d'AP en 6^e. Il fait partie d'une séquence de plusieurs séances menées par deux enseignantes l'une de français, l'autre de mathématiques autour de l'apprentissage de la compréhension de texte (travail basé sur le manuel de français « Lector – Lectrix ». Même si le contexte est très particulier, le travail mené nous semble tout à fait pouvoir être mené dans un contexte plus classique.

Contexte général : le travail sur les droites parallèles et perpendiculaires a été fait en début d'année (mois de septembre). La séance décrite ici est une reprise plusieurs mois plus tard (mois de février).

Contexte particulier : Les élèves ont travaillé en AP la notion de reformulation (plutôt autour de textes littéraires), la séance commence ici par un rappel de ce qui a été fait à ce sujet, les élèves disent que pour reformuler il s'agit de « dire la même chose mais autrement, avec nos mots », il est rappelé ce que cache « la même chose » : on peut transformer un énoncé en le reformulant mais il convient de ne pas trahir les idées du texte. Reformuler des maths ? Les élèves disent « Pourquoi pas ».

La séance commence par des rappels à l'oral sur la notion de reformulation (telle qu'abordée dans les séances précédentes), et sur les définitions et propriétés des droites parallèles et perpendiculaires (vues quelques mois plus tôt, exemple de retour : « deux droites parallèles sont deux droites qui ne se touchent pas », « quand deux droites sont perpendiculaires à une autre, elles sont forcément parallèles », « quand deux droites sont parallèles à une autre droite, elles sont parallèles entre elles »).

Un ensemble de 18 propositions mathématiques est ensuite distribué aux élèves. Il s'agissait de différentes versions de trois propriétés vues en cours qu'il allait falloir retrouver. La consigne était de classer les 18 propriétés en trois paquets, non nécessairement égaux. Chaque paquet devait contenir les différentes reformulations d'une même propriété.

Les 18 formulations distribuées (une feuille A4 à découper) :

Si deux droites sont perpendiculaires à une même droite, alors elles sont parallèles.	Deux droites perpendiculaires à un troisième droite sont parallèles.	Si deux droites sont parallèles et si une troisième droite est perpendiculaire à l'une, alors elle est perpendiculaire à l'autre.
On choisit deux droites parallèles, une troisième droite qui est parallèle à l'une des deux sera toujours parallèle à l'autre.	Si deux droites sont parallèles et si une troisième droite est parallèle à l'une, alors elle est parallèle à l'autre.	Lorsque deux droites sont parallèles, toute droite perpendiculaire à l'une est perpendiculaire à l'autre
On choisit deux droites parallèles, une troisième droite qui est perpendiculaire à l'une des deux sera toujours perpendiculaire à l'autre.	Si deux droites sont parallèles, alors toute droite perpendiculaire à l'une est perpendiculaire à l'autre.	Si une droite est perpendiculaire à deux autres droites, alors ces deux droites sont nécessairement parallèles.
Si deux droites sont parallèles, alors toute droite parallèle à l'une est parallèle à l'autre.	Si deux droites d_1 et d_2 sont parallèles et qu'une, par exemple d_1, est perpendiculaire à une troisième droite d_3 alors l'autre parallèle, ici d_2, est aussi perpendiculaire à la troisième droite d_3.	Si deux droites d_1 et d_2 sont parallèles et qu'une, par exemple d_1, est parallèle à une troisième droite d_3 alors l'autre parallèle, ici d_2, est aussi parallèle à la troisième droite d_3.
Si deux droites sont parallèles, alors toute droite perpendiculaire à l'une est perpendiculaire à l'autre.	Si deux droites sont parallèles à une même troisième droite, alors elles sont parallèles entre elles.	Quelles que soient les droites d_1, d_2 et d_3, si d_1 est perpendiculaire à d_2 et d_1 est perpendiculaire à d_3 alors d_2 est parallèle à d_3.
Lorsque deux droites sont perpendiculaires à une même droite, elles sont forcément parallèles.	Quand on a deux droites parallèles à une même droite, elles sont également parallèles entre elles.	J'ai deux droites parallèles et une autre droite qui est perpendiculaire à ma première droite. Alors je sais qu'elle sera aussi perpendiculaire à ma deuxième droite.

La distribution des feuilles et le découpage peut prendre du temps (parfois quinze minutes) !

Les élèves ont du mal à comprendre la consigne : « ça veut tous dire la même chose », « c'est la même chose » ou « j'ai pas compris ce qu'il fallait faire ».

Les discussions abordent sur la structure des propositions : « mais ce ne sont pas des hypothèses là, ça ne commence pas par "je pense que" », un autre élève répond « mais non, ça c'est en SVT », allusion est faite aussi à l'EIST[4]. Autre réaction : « non, ce n'est pas la même chose puisqu'on ne conclut pas la même chose ».

Exemple de stratégie :

– Souligner avec deux couleurs différentes hypothèses et conclusions,

– Ajouter un dessin, une figure codée (au moins pour les propriétés jugées « compliquées »). Certains élèves arrivent alors à deux paquets de formulations, la séparation des deux propositions concernant les droites perpendiculaires se faisant en analysant les hypothèses.

– Surligner les mots clefs pour obtenir trois paquets (identifications hypothèses et conséquences, comparaison des mots clefs dans les formulations des hypothèses, et des conséquences) : 1^{er} paquet « perpendiculaires » / « parallèles », 2^e paquet « parallèles » / « perpendiculaires », et 3^e paquet « parallèles » / « parallèles ».

– proche de la précédente : deux paquets sont faits en fonction de la conclusion (parallèles ou perpendiculaires), puis séparation du paquet « parallèles » en deux en fonction des hypothèses.

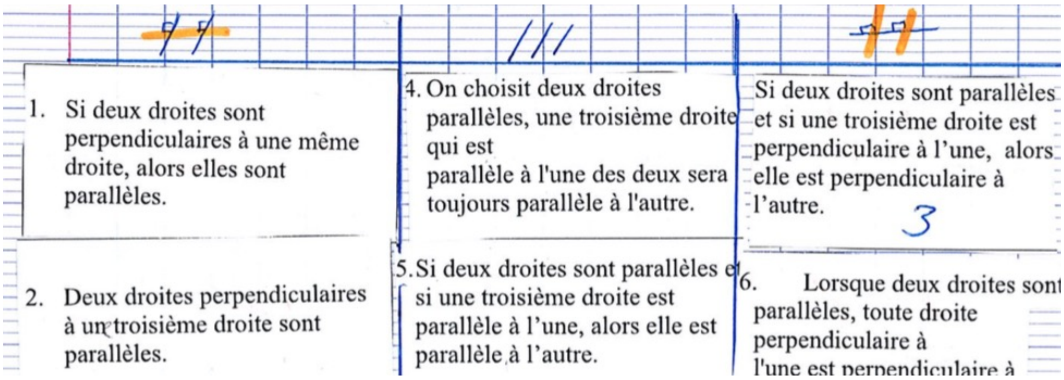
4 Enseignement intégré de science et technologie

Les échanges entre élèves et avec les élèves sont très riches. L'activité se termine en demandant aux élèves de coller les paquets sur une feuille, et de dessiner une figure pour chaque paquet. Certains y sont parvenus, pas tous.

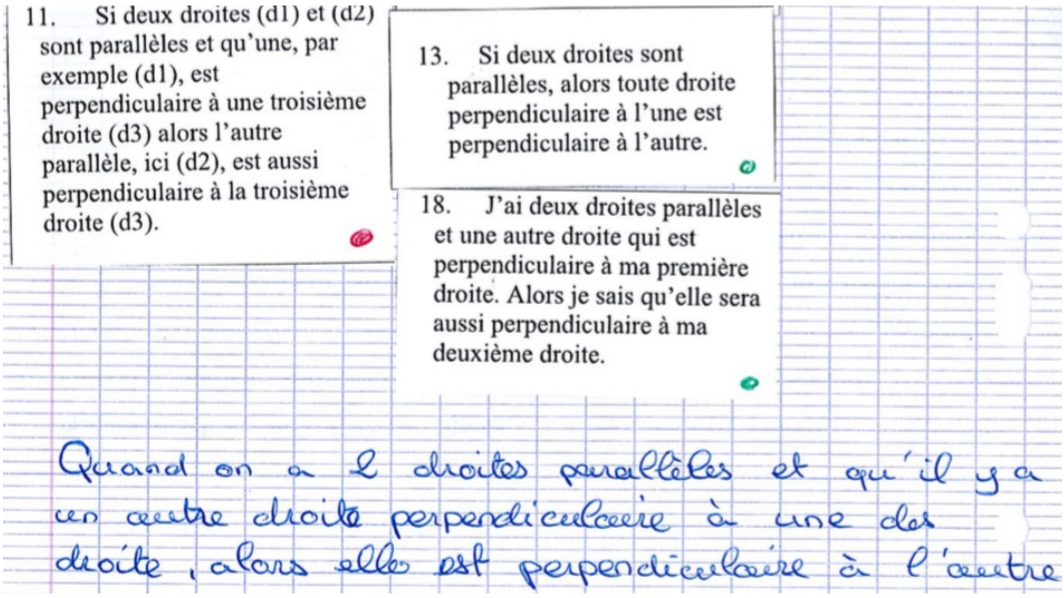
Pour ceux qui étaient plus rapides, il a été demandé d'ajouter des coeurs ou des smileys autour des formulations qui leur paraissaient les plus claires, et de mettre une croix pour les moins claires. Ils ont aussi ajouté leur propre reformulation pour chaque paquet.

En fin de séance les élèves déclarent qu'ils comprennent mieux ces propriétés (certains ont tout de même dit qu'ils les avaient déjà comprises et d'autres ont dit que la majorité des formulations les avaient aidé mais pas toutes). Les formulations longues ou comprenant plus de notations (d_1, d_2 et d_3 par exemple) ne sont pas appréciées.

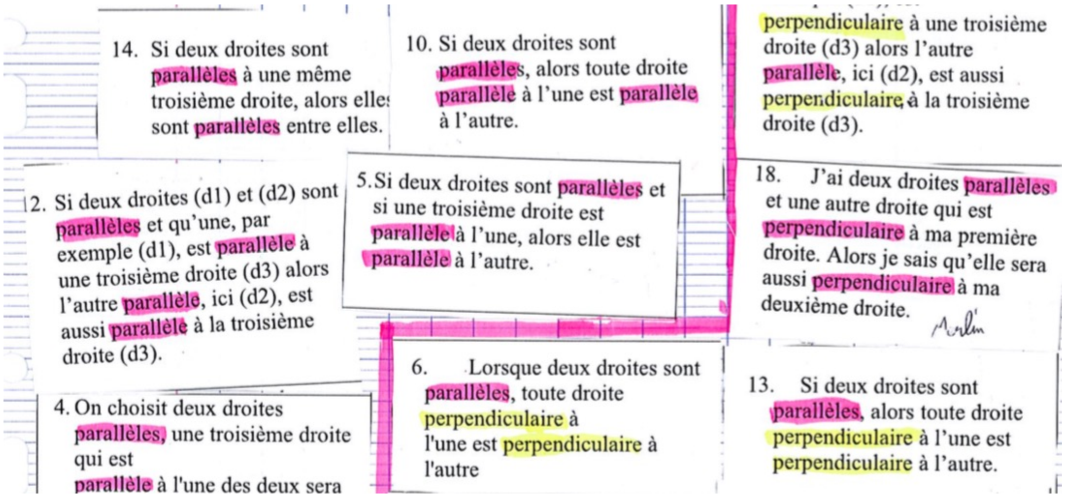
Copie avec petite figure de résumé :



Copie avec reformulation (et petit points colorés donnant l'appréciation de l'élève) :



Copie avec surlignage des mots clefs :



14. Si deux droites sont parallèles à une même troisième droite, alors elles sont parallèles entre elles.

10. Si deux droites sont parallèles, alors toute droite parallèle à l'une est parallèle à l'autre.

perpendiculaire à une troisième droite (d3) alors l'autre parallèle, ici (d2), est aussi perpendiculaire à la troisième droite (d3).

12. Si deux droites (d1) et (d2) sont parallèles et qu'une, par exemple (d1), est parallèle à une troisième droite (d3) alors l'autre parallèle, ici (d2), est aussi parallèle à la troisième droite (d3).

5. Si deux droites sont parallèles et si une troisième droite est parallèle à l'une, alors elle est parallèle à l'autre.

18. J'ai deux droites parallèles et une autre droite qui est perpendiculaire à ma première droite. Alors je sais qu'elle sera aussi perpendiculaire à ma deuxième droite.

4. On choisit deux droites parallèles, une troisième droite qui est parallèle à l'une des deux sera

6. Lorsque deux droites sont parallèles, toute droite perpendiculaire à l'une est perpendiculaire à l'autre

13. Si deux droites sont parallèles, alors toute droite perpendiculaire à l'une est perpendiculaire à l'autre.

-IV- Formuler, reformuler une définition

Le type de travail présenté à propos des propositions (cf. introduction du -II- page 4) peut être étendu à l'énoncé de certaines définitions. Il ne s'agit pas nécessairement de systématiser le principe à toutes les définitions, mais de choisir des moments et des contenus adaptés pour rendre naturelle la réflexion sur la formulation.

1. Médiatrice (6^e^)

Le principe de la séance est le suivant : les élèves (ou le professeur si projeté) tracent un segment $[AB]$ sur un logiciel de géométrie dynamique et tracent la médiatrice du segment $[AB]$ à l'aide de la commande ad hoc sans connaitre la définition d'une médiatrice ni l'objet médiatrice (idée de boîte noir). Ils déplacent les points A et B afin d'essayer de voir les propriétés qui se conservent. Ils doivent alors donner une formulation d'une définition d'une médiatrice.

Sujet en classe de 6e :

1.Sur Géogébra, tracer un segment [AB]

2. Tracer la médiatrice du segment [AB] en utilisant l'outil « Médiatrice » (quatrième icône troisième ligne) et en cliquant ensuite sur A puis B.

Proposer une définition d'une médiatrice d'un segment :

....

Les élèves n'ont pas eu de problèmes pour comprendre le sujet (ce n'était pas leur première séance sur Geogebra). Ils ont par contre eu beaucoup de difficulté à écrire une phrase qui ait du sens. Beaucoup ont vu l'idée de perpendicularité, l'idée de « milieu » a eu du mal à émerger, peut-être en lien avec le fait qu'il n'y avait pas de codage. Seul un élève a vérifié que la médiatrice passait effectivement par le milieu de $[AB]$ en le traçant avec le logiciel.

Pour énoncer la définition, les élèves oublient souvent de dire si l'on parle d'un point, d'une droite, d'un segment (peut être parce que cela leur semble évident sur le moment, qu'ils ne jugent pas bon de le préciser). Ils ont utilisé sans confusion le mot « perpendiculaire ». Le mot « milieu » ne vient pas naturellement, ils parlent davantage de « couper en deux parties égales », « séparer en deux parties »…

Phrases proposées par les élèves :

1. C'est une droite qui passe par le milieu du segment.
2. La médiatrice est une droite passant par une autre droite perpendiculaire et qui fais un milieu identique.
3. C'est une droite qui passe par le milieu et qui est perpendiculaire.
4. C'est une perpendiculaire passant par le milieu [AB].
5. C'est une perpendiculaire au segment.
6. La médiatrice est une droite passant perpendiculairement à un segment en formant un milieu.
7. Une droite qui passe perpendiculairement par le milieu d'un segment.
8. C'est la perpendiculaire passant par le milieu de [AB].
9. C'est une droite qui passe par un segment au milieu perpendiculairement.
10. C'est une droite qui passe perpendiculairement à une autre droite sur le milieu.
11. Médiatrice : droite passant par le milieu d'un segment et perpendiculairement.
12. Ça coupe le segment en deux parties égales.
13. Une médiatrice est une droite qui coupe le segment [AB] en deux parties égales.
14. C'est une droite qui sépare le segment en 2 parties égales c'est une perpendiculaire.
15. Une médiatrice c'est une droite perpendiculaire au segment.
16. La médiatrice est deux segments perpendiculaires.
17. C'est une droite perpendiculaire qui passe par le milieu d'un segment.
18. Droite perpendiculaire au segment passant au milieu du segment.
19. C'est une droite perpendiculaire qui passe toujours au milieu du segment.
20. Une médiatrice d'un segment est comme une perpendiculaire du segment.
21. Une médiatrice est une droite qui passe au milieu d'un segment en formant un angle droit.
22. Droite perpendiculaire en passant au milieu du segment.
23. La médiatrice est une droite qui se croise avec le segment [AB].
24. Une médiatrice coupe un segment qui sépare un segment.

La même activité a été proposée en 5^{e}, légèrement modifiée (l'enjeu portait plus sur la formulation de la définition que sur son contenu, censé être connu, l'énoncé demandait ainsi de tracer le milieu avant la médiatrice). Les phrases obtenues sont les suivantes :

1'. Droite qui coupe perpendiculairement un segment en son milieu

2'. Une médiatrice est une droite qui passe par le milieu du segment et qui est perpendiculaire au segment

3'. Une médiatrice est une droite qui est perpendiculaire

4'. La médiatrice d'un segment est le point I qui passent par le milieu du segment [AB]

5'. La médiatrice c'est une droite qui coupe un segment

6'. Une médiatrice est une droite qui passe par le milieu d'un segment

7'. Une médiatrice est une droite qui coupe le segment en deux parties et qui passe perpendiculairement

8'. La médiatrice d'un segment est une droite perpendiculaire passant par un milieu

9'. Une médiatrice est une droite qui passe au milieu d'une droite et du segment.

10'. La médiatrice d'un segment est la droite qui se coupe en un point et qui est perpendiculaire au segment de se point, cela forme un angle droit

11'. La médiatrice est une droite qui coupe un segment en deux parties égales

Au cours suivant, l'enseignante projette en classe leurs définitions (toutes en même temps) afin que les élèves puissent les comparer. Un tri est fait : certaines définitions sont enlevées parce que « elles ne veulent rien dire ». Il a été vu que plusieurs définitions différentes pouvaient être correctes et, pour les 6^{e}, cela paraissait assez nouveau. La fin de la discussion débouche sur l'écriture dans le cahier de cours des définitions retenues.

L'expérience a été menée plusieurs fois : sur plusieurs objets mathématiques, plusieurs années, le nombre de formulation varie (de une à trois) en fonction des phrases de départ et de la discussion.

Le travail a été mené par exemple sur la définition du cercle, là aussi en 6^e^. La classe est arrivée à deux définitions :

- Un cercle est une figure géométrique dont tous les points sont à la même distance d'un point appelé centre,
- Un cercle est l'ensemble de tous les points situés à égale distance d'un même point appelé centre.

2. *Hauteurs (6^e^)*

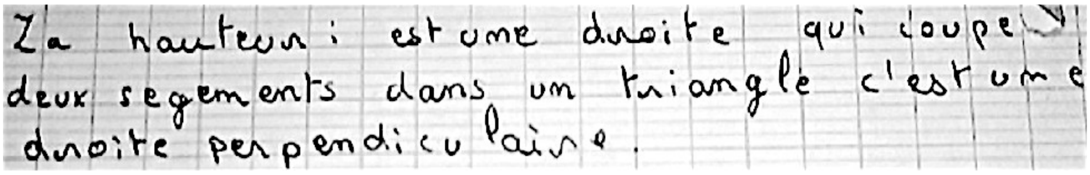
Contexte de la séance : les élèves connaissent la notion de médiatrice. Ils ont travaillé sur des figures de triangles dans lesquels sont construits des droites qui sont des hauteurs ou non. Pour chaque triangle, il est justement indiqué en dessous s'il s'agit d'une hauteur. Ils doivent trouver les caractéristiques d'une hauteur. À la fin de cette séance, il est convenu (à l'oral) pour l'ensemble de la classe que l'on parle de hauteur d'un triangle et qu'elle a deux propriétés :

- Elle est perpendiculaire à un des côtés,
- Elle passe par un sommet

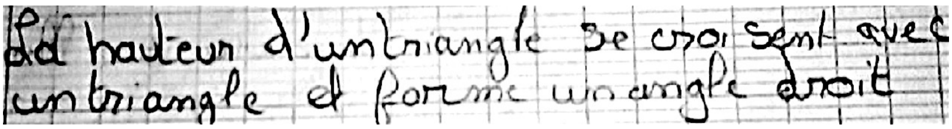
Ces deux propriétés sont énoncées oralement plusieurs fois et les élèves doivent en prendre des notes.

Lors de la séance suivante, chaque élève a pour consigne d'écrire par écrit une définition de la hauteur d'un triangle. Quelques productions d'élèves :

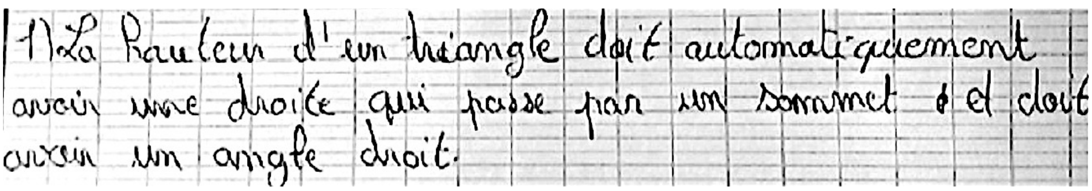
- Les hauteurs d'un triangle forme un angle droit.
- La hauteur : est une droite qui coupe deux segments dans un triangle c'est une droite perpendiculaire.


La hauteur : est une droite qui coupe deux segments dans un triangle c'est une droite perpendiculaire.

- Une hauteur d'un triangle c'est une droite perpendiculaire qui doit passer par un des sommet du traingle et par un des côtés.
- La hauteur d'un triangle se croisent avec un triangle et forme un angle droit.


La hauteur d'un triangle se croisent avec un triangle et forme un angle droit

- La hauteur d'un triangle est une droite perpendiculaire.
- La hauteur d'un triangle se trace vers les côtés du triangle et ne passe pas forcément par le milieu.
- La hauteur est une droite qui passe par un sommet et qui dois comporter un angle droit.
- La hauteur d'un triangle doit automatiquement avoir une droite qui passe par un commet et doit avoir un angle droit.


1) La hauteur d'un triangle doit automatiquement avoir une droite qui passe par un sommet et doit avoir un angle droit.

- La hauteur d'un triangle c'est quand on a une droite qui passe par un dees sommet du triangle et forme un angle droit. Il traverse le triangle.

- La hauteur d’un segment est quand on trave une droite dans une droite que sa forme un angle droit.

Chaque phrase proposée est discutée, nous sommes finalement arrivés à énoncer trois définitions satisfaisant tout le monde (y compris l’enseignante) et chaque élève en a choisi deux pour écrire dans la leçon.

Les trois définitions produites :

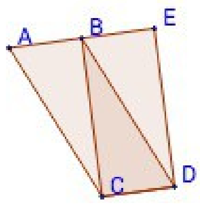
- Une hauteur d'un triangle est une droite qui :
  - est perpendiculaire à un côté du triangle
  - passe par le sommet opposé à ce côté.
- Une hauteur d'un triangle est une droite perpendiculaire à un des côtés du triangle passant par le sommet opposé.
- Une hauteur d'un triangle est une droite qui passe par un sommet du triangle et qui est perpendiculaire au côté opposé.

-V- Formuler, reformuler une démonstration

L'idée de départ était de mener des séances au cours desquelles la classe se met d'accord sur la trame fine d'une preuve (oralement ou à l'aide d'un schéma, démonstration dans le cours ou démonstration lors de la résolution d'un exercice) avant de travailler, individuellement puis collectivement, la formulation selon les expérimentations précédentes.

Par exemple, pour répondre à la question « Donner l'écriture de 35 / 25 sous forme d'une fraction irréductible. Justifier », on pourrait convenir dans un premier temps :
– que la fraction irréductible est 7 / 5,
– que, pour le prouver, il faut expliquer que 35 : 5 = 7 et 25 : 5 = 5 pour arriver à 35 / 25=7 / 5,
– et qu'il faut utiliser le fait que 7 et 5 sont premier entre eux.

On peut aussi dire (faire dire) par exemple qu'il y a une méthode qui consiste à diviser le numérateur et le dénominateur par leur pgcd, et calculer le pgcd de 25 et 35.



Autre exemple. Dans la figure ci-contre on sait que *ABCD* et *CDEB* sont des parallélogrammes et on doit prouver que *B* est le milieu de [*AE*]. On se met d'accord dans un premier temps sur le fait qu'il faut prouver que *A*, *B* et *E* sont alignés et que les longueurs *AB* et *BE* sont égales. On peut prouver l'alignement à l'aide des propriétés des parallélogrammes utilisées dans chacun des deux parallélogrammes de l'énoncé (côtés opposés parallèles). On arrive alors à prouver que (*AB*) // (*BE*). Le fait que ces deux droites ont un point commun permet d'affirmer l'alignement voulu. On montre l'égalité de longueur avec les propriétés des parallélogrammes (côtés opposés de même longueur).

L'idée est ensuite de demander aux élèves « d'écrire une démonstration », « d'écrire ce qu'ils écriraient sur une copie pour justifier », puis de mener une mise en commun. On peut aussi imaginer un travail intermédiaire par deux ou en groupes (par exemple la lecture à un élève de sa production par un autre élève est un exercice très riche pour les deux élèves) demandant aux groupes de se mettre d'accord sur une formulation de la preuve.

Les sous entendus sont les mêmes que L'idée pour les présentations de (re)formulations de définitions et de propositions, en s'appuyant sur le fait que parler et penser sont indissociable, que formuler et se représenter sont deux facettes d'une même activité, etc. nous pensons que confrontation des élèves avec les incompréhensions de leurs lecteurs, avec leur incompréhension des formulations des autres élèves, la discussion collective des formulations de preuve possibles, de la façon de présenter tel ou tel pas de déduction, l'avantage de tel ou tel enchaînement logique, etc.

peuvent être source d'appropriation des usages, des façons de dire d'une part, et source d'apprentissage (des mathématiques) d'autre part.

1. Au collège en 4^e^, formulation de la réponse à un exercice

Première expérience

Exercice de contrôle avec Justification. L’enseignante choisit sept copies qu'elle donne à sept groupes de travail en vue d'améliorer (« modifiez ce que vous voulez »), ce premier travail est corrigé et donne lieu, ensuite, à un 2e travail en groupe, mais pas en classe : nouvelle rédaction en fonction des annotations. Enfin l'ensemble est repris en classe avec chaque groupe qui finalise sur place et mise en commun (environ 20 minutes) : différentes versions de la justification de l'exercice, points commun, différentes manières de justifier, de rédiger, de présenter, ordre différents, etc.

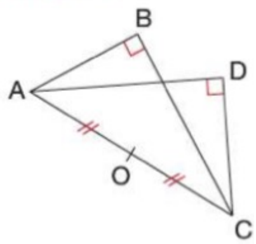
Les élèves étaient très volontaires (alors qu'en difficulté quant à la maitrise de la langue).

Seconde expérience

Expérimentation (avec la même classe de 4e) à partir de l'exercice ci-contre en deux temps : une séance complète de travail individuel puis en groupe, suivie d'une discussion collective.

88 Penser à compléter la figure

ABC et ADC sont deux triangles rectangles respectivement en B et en D.
O est le milieu de [AC].
Quelle est la nature du triangle BOD ?
Expliquer.



Les modalités de travail sont donc différentes, à la fois avec l'idée de faire moins long et moins lourd, mais aussi pour s'adapter au rythme des élèves, et aux difficultés : les choses n'étaient pas spécialement anticipées.

Les élèves travaillent d'abord seuls et écrivent leur réponse (10 minutes) ; ils doivent ensuite, en groupe de 4 ou 5, produire une résolution commune de l'exercice (25 minutes) ; enfin, chaque groupe reçoit la production d'un autre groupe, doit proposer des améliorations / corrections / modifications et produire une nouvelle version (15 minutes).

Lors de la séance suivante, les différentes versions sont exposées (deux versions par groupe) et sont le support à la discussion : avis sur les différentes versions, nouvelles modifications éventuelles, choix d'une version pour écrire dans le cahier d'exercices comme correction ? Etc. Deux versions sont finalement écrites dans le cahier.

Lors des discussions, deux points ressortent :

- les nombreuses erreurs de notation (longueurs, segments, droites),

- ce que l'on attend comme type de justification en mathématiques : pour justifier, on doit raisonner en s'appuyant sur des définitions et / ou des propriétés, et non pas sur des figures, des tracés sur des figures et des observations ou des constats sur des figures (d'où une remarque écrite dans le cahier : « Pour justifier en mathématiques, on fait un raisonnement en s'appuyant sur des propriétés et des définitions. Un exemple, ou une figure (ce que l'on constate sur une figure) ne prouve rien »).

Ci-dessous, exemple pour le groupe 1 :

1.1 Formulation récupérée à retravailler

- On sait que les triangles ABC et ADC sont rectangle en B et en D, et ont un hypoténuse commun. O est le milieu de $[AC]$.
- Donc le cercle circonscrit est le même pour ces deux triangles.

- **Une fois le cercle circonscrit tracée on peut constater**[5] que l'hypoténuse est le diamètre de ce cercle et que [*BO*] et [*DO*] en sont des rayons.
- Alors *BOD* est isocèle.

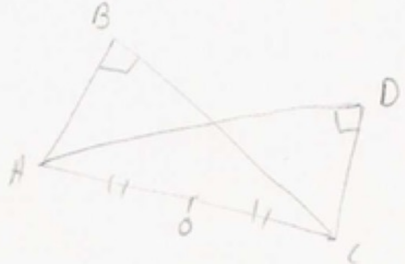
1.2 Formulation issue du travail du groupe

• On sait que les triangles ABC et ADC sont rectangle en B et en D, et ont un hypoténuse commun. O est le milieu de [AC].

• Donc le cercle circonscrit est le même pour ces deux triangles.

• ~~Le~~ Une fois cercle circonscrit tracée on peut constater que l'hypoténuse est le diamètre de ce cercle et que [BO] et [DO] en sont des rayons.

• Alors BOD est isocèle.



1.3 Formulation reprise dans le cahier d'exercice (et modifications après la discussion collective)

- On sait que les triangles *ABC* et ADC sont rectangle**s** en *B* et en *D*, et ont un**e** hypoténuse commun**e : [*AC*]**. O est le milieu de [*AC*].
- Donc le cercle circonscrit est le même pour ces deux triangles et [*BO*] et [*DO*] en sont des rayons.
- **Donc *BO* = *DO*.**
- Alors *BOD* est isocèle **en *O***.

Impressions de l'enseignante a posteriori : il est difficile de « mesurer » l'évolution des choses. Mais de façon sans doute subjective il semble que les élèves se lancent dans l'écrit avec moins d'appréhension, et que certains automatismes apparaissent (utilisation de certains mots, de certaines tournures de phrases, réflexe de regarder la propriété dans le cahier de cours).

2. Au lycée (1eS), formulation de la preuve d'une propriété

Il s'agit d'une séance d'une heure en première S autour de la propriété mathématique suivante :« Un nombre et son carré ont toujours même parité ».

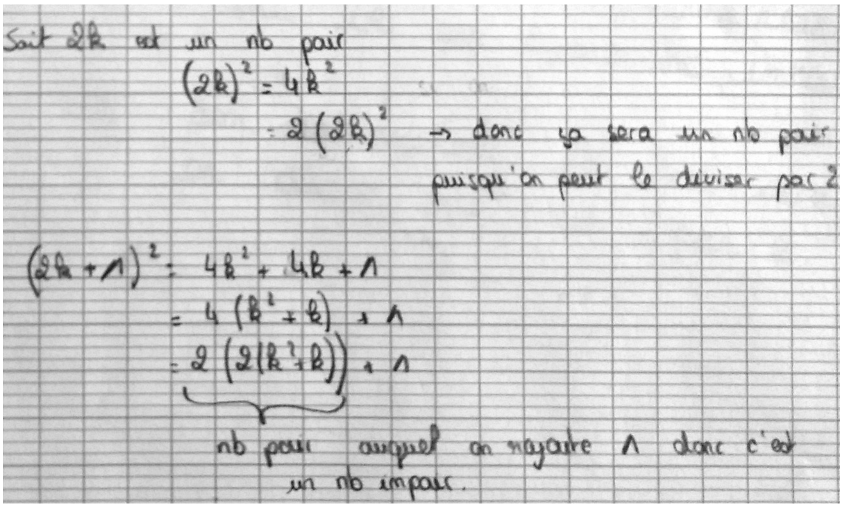
Le sens des mots et de la phrase est discuté et pour certains éclairci, puis une discussion s'engage sur la véracité de la propriété, il y a rapidement consensus (un élève évoque le cas de 5, un autre le

5 C'est cette constatation qui permet de faire émerger la discussion sur la nature des justifications en mathématiques lors du bilan Remarque : de façon générale, on peut constater que, même si le travail est centré sur la formulation de la démonstration, il est presque systématique que des thématiques générales (la validation d'un résultat en mathématique, la nature d'une définition) ou des notions a priori plus éloignées soient abordées dans les discussions. L'enseignant peut alors faire parler les élèves sur ces points, faire des rappels, des liens entre chapitres, etc. (d'une façon qu'il n'est cependant pas facile d'anticiper).

cas de 8, et cela emporte la conviction) sur le fait que la propriété est vraie. Il est alors demandé de « rédiger une preuve ».

L'organisation est la suivante : un premier temps est donné pour commencer à chercher (5 minutes), la rédaction se fait à plusieurs, par groupe (« un seul écrit, il faudra se mettre d'accord »). Suite à une question, l'enseignante précise qu'il faut une « belle démonstration, intelligible par tout le monde, où il y a tous les arguments qui permettent d'affirmer que c'est vrai, et sans fioritures, il faut être efficace ». Une dernière partie de la séance est consacrée à une relecture par chaque groupe du travail d'un autre groupe (le retour est écrit : un commentaire, ou une reformulation partielle, ou complète).

Les élèves commencent généralement par échanger sur ce qu'ils ont « trouvé ». Par exemple dans un des groupes, rapidement la discussion se centre sur le brouillon d'un des élèves :



Soit 2k est un nb pair

$(2k)^2 = 4k^2$

$= 2(2k)^2$ → donc ça sera un nb pair puisqu'on peut le diviser par 2

$(2k+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1$

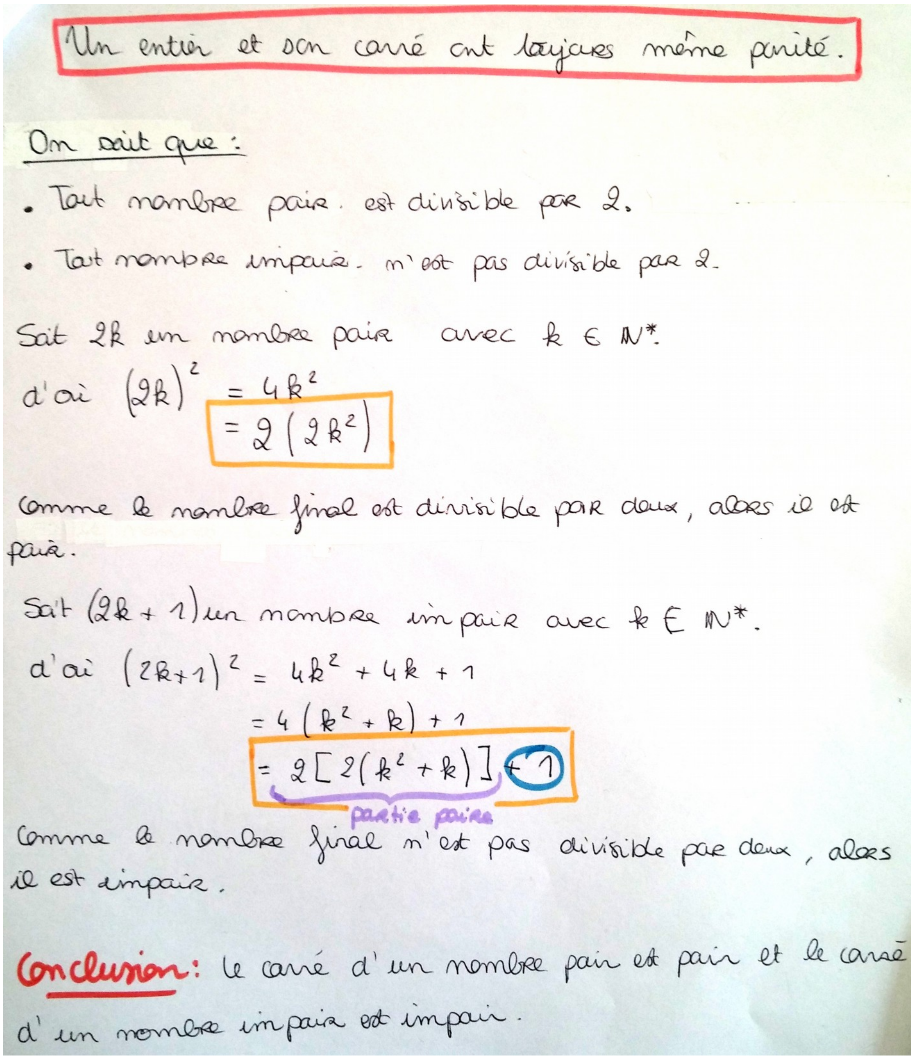
$= 4(k^2+k) + 1$

$= \underbrace{2(2(k^2+k))}_{\text{nb pair auquel on rajoute 1 donc c'est un nb impair.}} + 1$

L'élève explique alors ce qu'il a fait, il essaye d'expliquer, de convaincre :

> – J'ai dit que le nombre pair ça pouvait être deux *k* et que du coup deux *k* au carré bin ça fait quatre *k* au carré et on peut factoriser par deux, et si on peut factoriser par deux c'est qu'on peut diviser par deux et donc (interrompue)
> – deux *k* au carré ?
> – Oui, parce que tu vois, tu dis que « Soit deux *k* un nombre pair » ça c'est ton nombre de départ,
> – Ouais…
> – que tu mets au carré, tu veux prouver que son carré est un nombre pair, du coup ça fera quatre *k* carré, et quatre *k* carré tu peux le factoriser par deux, ça veut dire que tu peux diviser par deux, donc que c'est aussi un nombre pair. Et j'ai fait la même chose avec deux *k* plus un, du coup bin deux *k* plus un c'est un nombre impair, que j'ai mis au carré, après j'ai trouvé qu'on pouvait factoriser, on avait une partie qui était pair et qu'il y avait toujours le plus un.

La discussion dure ensuite 20 minutes et mène à la rédaction de la preuve suivante :


Un entier et son carré ont toujours même parité.

On sait que :

- Tout nombre pair est divisible par 2.
- Tout nombre impair n'est pas divisible par 2.

Soit $2k$ un nombre pair avec $k \in \mathbb{N}^*$.

d'où $(2k)^2 = 4k^2$
$\boxed{= 2(2k^2)}$

Comme le nombre final est divisible par deux, alors il est pair.

Soit $(2k+1)$ un nombre impair avec $k \in \mathbb{N}^*$.

d'où $(2k+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1$
$= 4(k^2+k) + 1$
$\boxed{= \underbrace{2[2(k^2+k)]}_{\text{partie paire}} + 1}$

Comme le nombre final n'est pas divisible par deux, alors il est impair.

Conclusion : le carré d'un nombre pair est pair et le carré d'un nombre impair est impair.

Les points abordés dans les échanges sont variés. En analysant les discussions de six groupes de travail, on peut énumérer les problématiques suivantes :

– le début des échanges concerne souvent le calcul clef (calcul de $(2k)^2$ et de $(2k + 1)^2$, ou calculs liés à d'autres pistes de preuves), le temps pris pour que tout le monde soit convaincu du résultat et du fait qu'il y a matière à écrire une preuve est assez court.

> **Exemple 1 :** Voir ci-dessus.
>
> **Exemple 2 :** – Ah non, mais moi c'est en gros, enfin il y a rien qui est prouvé, c'était juste, en gros j'ai dit que c'était vrai pour zéro, un, deux, trois, quatre, cinq, six, sept, huit, neuf, dix. Et que du coup c'était vrai pour tous les nombres qui finissaient par ces chiffres.
> – Mais il faut le démontrer.
> – Bin oui. Mais je ne l'ai pas démontré. Mais en gros c'est ça quoi.

– Dans la plupart des échanges la contrainte de présenter les variables (« les lettres », « les nombres ») dont on parle est évoquée. Les expressions usuelles sont variées : « Soit », « On se donne », « On considère », « On a », « avec », etc. Elles ne sont cependant pas interchangeables. Les enjeux (qui restent implicites, et probablement inconscients) sont importants : dans la phrase « Soit k un entier, soit $n = 2k$ », on introduit une variable k pour prouver une propriété du type « $\forall k$ ... », on introduit aussi une variable n qui représentera le double de k. Dans la phrase « Soit n un entier pair, on peut écrire $n = 2k$ avec k entier », on introduit une variable n dans le but de prouver une propriété du type « $\forall n$ ... », on affirme l'existence d'un nombre k (dont n est le double).

Exemple1 : – Au début on définit les nombres
– Ouais, il faut définir un entier
– *n*
– Non un nombre pair et un nombre impair
(…)
– On peut dire « Soit deux *k* un nombre pair »
– Non déjà il faut dire ce qu'est *k* « Soit deux *k* un nombre pair avec *k* un nombre entier »
– « Soit *k* un nombre appartenant à *R* », euh « à *N* » pas « à *R* »
– Donc je mets « Soit deux *k* un nombre pair »
– Bin non mets « Soit *k* un nombre pair »
– Non, c'est deux *k* qui va être pair parce que
– D'accord, donc « Soit deux *k* un nombre pair et *k* » qui va être…
– « avec *k* »
– « appartenant à *N* »

Exemple 2 : – Il faut définir *k* à la base, « Soit *k* un entier naturel et *n* égale deux *k* » c'est bon ?

Exemple 3 : – Moi j'aime bien, tous les nombres sont posés.

Exemple 4 : – ou alors « *n* comme étant un multiple de deux », non, enfin, « *n* carré comme étant un multiple de deux »
– non, « sous la forme deux fois »
– bin c'est pareil
– oui oui, comme tu veux
– Je préfère « sous la forme » c'est plus clair je trouve, ça fait plus… maths

Exemple 5 : – « Soit *b* un nombre impair, *b* égal deux *k* plus un »
– Le « Soit » peut-être il faudrait le changer je pense
– « avec *b* égale deux *k* plus un »
– Oui, je pense que c'est mieux « avec »

– Des discussions portent aussi sur les définitions : quelle est la définition d'un nombre relatif ? Ou quelle définition choisir pour un nombre pair ? Comment la formuler ? Faut-il rappeler la définition dans la preuve ?

Exemple 1 : – Tu peux marquer « On définit un nombre pair par le fait qu'il soit divisible par 2 » ou enfin… une belle phrase,
– On va faire un truc [écrit] « Définition »
– Ouais mais c'est pas comme ça une définition
– Non, mais je mets juste pour le début
– [dicte] « Démonstration »… mais il n'y a pas de définition dans une démonstration (…) Tu pourrais le tourner, euh, tu peux définir des trucs dans une démonstration
– Alors, « Nous savons que », mais oui, si « On sait que na na na »

Exemple 2 : – Ouais, « Soit k un entier », relatif ?
– Pourquoi relatif ?
– T'as pas besoin qu'il soit forcément euh
– C'est quoi déjà la différence entre relatif et naturel ?
– naturel c'est positif et relatif c'est positif négatif
– Ok… Ok, oui, du coup « relatif »

– Preuve : Que faut-il prouver ? Comment le prouver ?

Exemple 1 : – Je ne sais pas si ça montre le « si et seulement si », si tu peux faire ça dans l'autre sens… Enfin si, mais je ne sais pas si ça le montre
– C'est vrai que le truc c'est qu'il faut juste expliqué que deux fois l'entier (…) ça fait un truc pair et ça on le sait instinctivement. Mais est-ce que il faut le démontrer ?
– Que ça c'est pair ?
– Ouais, est-ce qu'il faut le démontrer ?… Ou on peut juste l'expliquer comme ça ?
– Bin après si tu penses que en disant une phrase, enfin non, mais…
– Si tu pars de la définition du nombre pair, qui est un nombre entier divisible par deux, un nombre fois deux
– Ouais, ça parait logique

Exemple 2 : – Après il faut mettre « on peut procéder par disjonction des cas »
– par quoi ?
– Dis-jonction-des-cas, c'est pour dire *k* plus un et *k*, c'est ça ?
– C'est, bin tu fais le cas où *n* est pair, et le cas où *n* est impair
– Ok
– D'accord
– Par contre je ne sais pas comment montrer que ça marche dans l'autre sens.
– C'est-à-dire ?
– C'est-à-dire si *n* est pair, *n* carré est pair. Et si *n* carré est pair alors *n* est pair ?

Exemple 3 : – Est-ce qu'il faut mettre que c'est un nombre entier ? Parce qu'on a mis juste que c'est un nombre, *a* et *b* appartenaient à deux *k*, et *k* c'est un…
– Ils sont forcément entier puisque c'est deux *k* et deux *k* plus un, et que *k* il est entier
– Oui, mais ils aiment bien quand on met des *N* ou des *R* et tout
– Mais comme c'est pair et impair c'est des entiers
– Oui, mais l'écrire c'est… *a* et *b* on a juste mis « nombre » tu vois
– Oui, un « nombre pair » ou « impair »
– Oui, mais on ne sait jamais
– *k* est entier
– Oui, mais je parlais de *a* et *b*
– Oui, mais si k il appartient à Z, donc a il est forcément…
– On le sait, on n'a pas besoin de le redire

– Organisation et présentation de la preuve : annonce-t-on ce que l'on va faire ? Rappelle-t-on ce que l'on a prouvé à chaque étape ?

Exemple 1 : « Est-ce que je fais genre "Soit *a* machin", la démonstration pour *a*, et après "Soit *b* machin", ou bien "Soit *a*, soit *b*" et après on fait les deux démonstrations ? »

Exemple 2 : – Du coup on met « Montrons que deux *k* plus un est impair »
– Tu peux mettre un tiret ici et on met un tiret, et après on met « donc deux *k* est un nombre impair »
– Attends, bin vas-y fait le
– On met un tiret ici, et on met, on met un tiret ici,
– Bin non, c'est ici, il faut que tu le mettes aussi,
– Non,
– Bin pourquoi ?
– Bin parce que là c'est pour pair, et ensuite impair [rires]
– Mais là t'as prouvé pour deux *k*
– Oui « Donc deux *k* plus un est un nombre impair »
– Ah ! Ah oui Ok
– Pfff il y a trop de « donc »
– Ouais, je suis d'accord, mais c'est pour ça que j'ai voulu mettre des tirets

Exemple 3 : – Et euh, ce qu'on n'a pas mis là-dedans, c'est que la somme de deux nombres pairs est paire
– Et il faut le mettre ? C'est à démontrer ?
– Non c'est parfait comme ça [rires]

– Organisation et présentation des calculs : ajout de parenthèses inutiles pour souligner une propriété, discussion sur la justification des calculs

Exemple 1 [à propos de : $2 \times 2k^2$] : – Moi ce que je proposais de faire, mais après vous dites ce que vous en pensez, c'est de faire ressortir le deux. Pour bien montrer que tu peux écrire *n* carré…
– pour que ça fasse deux deux *k* carré
– … de la forme de comment on a défini un nombre pair. Donc tu vois de faire deux [petit silence] deux *k* carré.

Exemple 2 [à propos de : $(2k) + 1$] : – T'as pas besoin de parenthèse hein
– Si
– Bin, deux *k* c'est un multiple, deux fois *k*
– Ouais ouais, mais c'est pas grave
– Oui, mais, euh, tu comprends mieux avec les parenthèses.

– Le style et l'allure générale de la preuve sont évoqués.

Exemple 1 : – Tu peux mettre, euh, « d'où », « d'où deux *k* au carré égal quatre *k* au carré »
(…)
– « Donc on a montré »
– « Donc », je mets « Donc le nombre final »
– « sera divisible par deux »
(…)
– Euh, ou tu mets « le nombre final sera pair », tu mets « donc »
– « Comme » ! « Comme le nombre final »
– Ah ouais, là, là c'est bien
(…)
– « Comme le nombre final est divisible par deux, alors il est pair »

Exemple 2 : – Il faut trouver une bonne manière de la dire.

Exemple 3 : – Ça fait beaucoup de « donc »

Exemple 4 : – Moi j'ai tendance, quand j'arrive là, à aller lire là
– Ah bin on va faire une petite flèche

Exemple 5 : – Bin ouais, mais, comment on, il faut démontrer ça de façon jolie quoi

– On trouve des discussions plus anecdotiques sur l'orthographe, des digressions non mathématiques (relativement peu fréquentes)

Exemple : – Et « pair » il n'y a pas de « e » ?
– Ah oui, et « impair » non plus

On perçoit dans ces échanges internes au groupe le lien entre la discussion de la forme, les choix de formulation et le choix mathématiques (gestion des variables, calculs effectués, choix de définition, choix d'arguments, etc.).

La séance se termine par une mise en commun pendant laquelle l'enseignant se saisit des différences entre les production obtenues, des réactions des groupes aux productions des autres groupes, pour mettre en avant les différents choix effectués. La validité des raisonnements présentés est analysée, de même les possibilités offertes par certains choix de formulations, les difficultés engendrées par d'autres, etc.

-VI- Autres expérimentations

Nous regroupons ici des expérimentations qui nous ont semblé moins convaincantes (1.), pour lesquelles nous ne disposons pas de descriptif précis (2., 3., 4.), ou que nous n'avons pas encore testé (5.).

1. *Reformulation d'une phrase du cours*

Même si les phrases complexes et qui mériteraient un travail sont nombreuses dans les manuels (par exemple), le travail de reformulation à partir d'un énoncé déjà existant nous a semblé très difficile, en tout cas pour l'énoncé d'une proposition récemment étudiée en cours : un tel travail demande de maîtriser le contenu mathématique et les subtilités de la langue.

2. *Définition de mots mathématiques*

Faire écrire aux élèves « avec leurs mots » le sens de certains mots mathématiques : « factoriser », « développer », « réduire », « simplifier », « calculer » (dans un cadre algébrique). Il est préférable de prendre un temps ensuite pour confronter en petit groupe les différentes définitions et formulations, voire de faire une mise en commun.

3. *Description de techniques pour d'autres élèves*

Pour d'autres élèves

Voir aussi ci-dessus le paragraphe « Élaboration de courtes vidéos par les élèves (6e et 4e) » page 14.

Nous avons expérimenté le fait de faire écrire à des élèves plus expérimentés une technique apprise l'année précédente, par exemple les techniques opératoires relatives aux nombres relatifs décrites par des élèves de 4^e pour des élèves de 5^e.

Pour soi (6^e)

Après avoir travaillé sur les fractions partage et nombre en 6^e, les élèves sont amenés à manipuler, lors d'une séance d'exercices, plusieurs écritures fractionnaires d'un nombre. Le passage d'une fraction à une fraction égale devant être maîtrisé pour passer plus tard à l'écriture décimale des nombres. Tout au long du chapitre, le professeur a proposé aux élèves de travailler avec des procédures orales. Par exemple, pour comparer « nous cherchons combien deux tiers font de douzièmes ». A force de faire des « conversions » avec des partage différents d'une unité, nous avons l'habitude de manipuler des « comptines orales » du type « douze c'est quatre fois trois donc un tiers c'est quatre fois un douzième, c'est-à-dire quatre douzièmes ; ainsi deux tiers c'est deux fois quatre douzièmes, c'est-à-dire huit douzièmes ». Lorsque les élèves n'y arrivent pas, on peut toujours revenir à des partages cependant cette procédure peut être longue et parfois source d'erreurs pour les élèves. Les élèves de cette classe ont ressenti le besoin d'écrire une règle en français pour écrire des fractions égales, des exemples ne leur suffisant pas.

Nous sommes ainsi partis de plusieurs égalités établies pour revoir les procédures orales et trouver une « règle » qui nous servirait par la suite. Après discussion avec l'ensemble de la classe, chaque élève essaye d'écrire une phrase bilan dans son cahier. Pour la mise en commun, les élèves volontaires étant les élèves les plus à l'aise, les formulations de la règle obtenues en classe entière sont correctes dans l'ensemble.

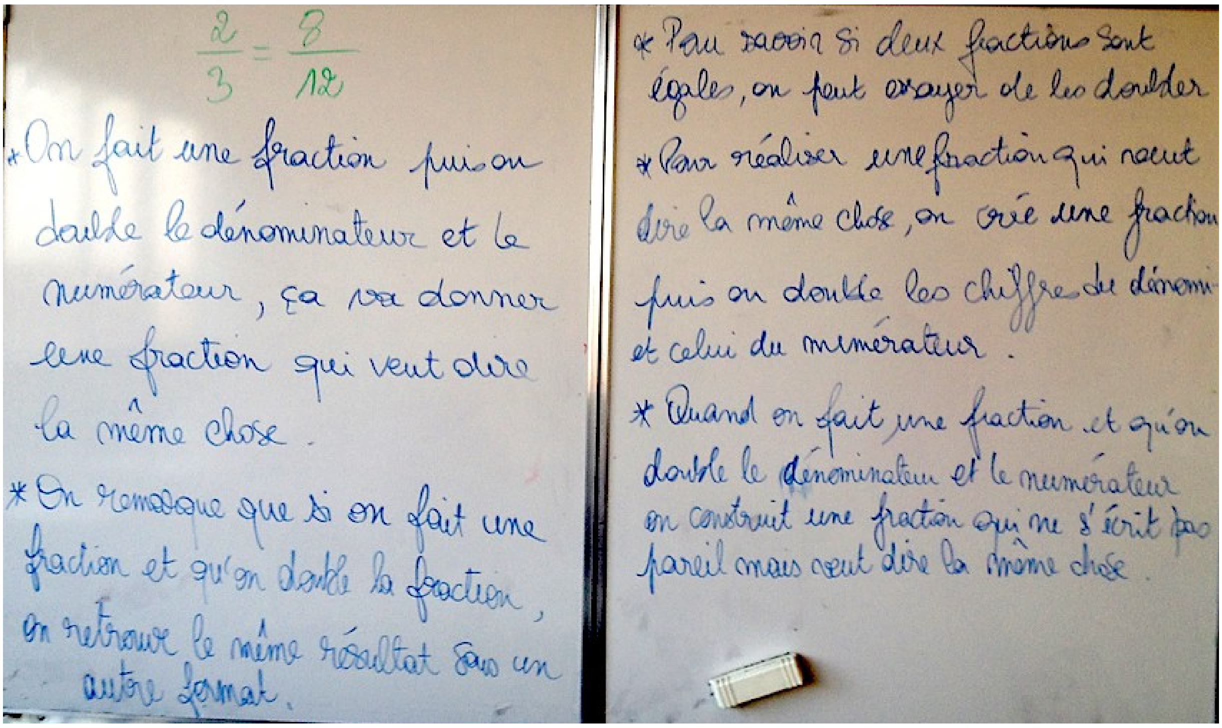
Phrases proposées en classe entière :

- Pour trouver des fractions égales, on doit multiplier le numérateur et le dénominateur par un même nombre.

- Pour trouver des fractions égales, on doit diviser le numérateur et le dénominateur par un même nombre.
- Pour égaliser deux fractions, il faut multiplier (ou diviser) le numérateur et le dénominateur par le même nombre.
- Pour trouver une fraction égale à une autre, il faut diviser (ou multiplier) le numérateur et le dénominateur par le même nombre.
- Si on multiplie (ou on divise) le numérateur et le dénominateur d'une fraction par un même nombre, on obtient une nouvelle fraction qui sera égale à celle de départ.

Le lendemain, nous sommes revenus sur cette règle avec les élèves les plus faible en petit groupe (sept élèves) et sur l'activité faite en classe entière. Ils n'avaient en majorité pas réussi à écrire une règle la veille et ne comprenaient pas celles énoncées en classe. Nous avons donc refait un travail similaire à celui fait en classe entière en préalable à l'écriture de la règle, et chacun des sept élèves a ensuite essayé à son tour d'écrire une règle. Il était convenu qu'à l'issue de ce travail personnel, nous établirions ensemble une phrase que le groupe présenterait au reste de la classe lors de la prochaine séance pour la noter dans la leçon avec quelques exemples.

Cinq phrases ont été proposées et écrites au tableau :



Pour les aider les élèves à reprendre leurs phrases collectivement, ils ont répondu aux posées par le professeur et les ont modifiées au fur et à mesure.

<u>Question 1 : Quelle phrase préférez-vous transformer ?</u>

Réponse : La première est celle que les élèves préfèrent. Ils évoquent le fait qu'elle soit plus simple car commence par « quand on ». Elle ressemble plus à une méthode, un procédé. C'est cette fois qui est modifiée par la suite.

<u>Question 2 : qu'est-ce que veut dire « faire une fraction » ?</u>

Réponse et discussion : on ne « fait pas une fraction ». Une fraction représente un nombre. Elle existe. On dira plutôt « on a une fraction ».

<u>Question 3 : qu'est-ce que ça veut dire « une fraction qui veut dire la même chose » ?</u>

Réponse et discussion : on parle plutôt de fractions qui sont égales entre elles. Les mots mathématiques à utiliser sont : égal à, être égal, égales.

<u>Question 4 : Pourquoi parler de « doubler un nombre » dans les phrases ? Est-ce toujours le cas pour avoir des fractions égales ?</u>

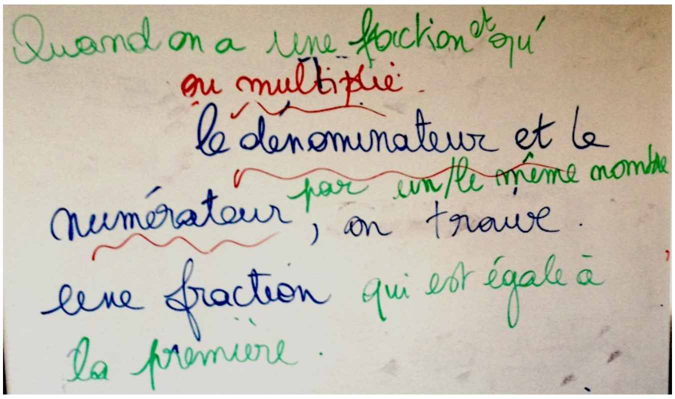
Réponse et discussion : En reprenant l'exemple , nous avons conclu que l'on peut aussi tripler ou quadrupler et même multiplier par n'importe quel nombre. L'utilisation du terme « multiplier par » n'est pas évident et plusieurs exemples ont dû être observés pour que les élèves trouvent l'opération multiplication et la nomment. Il a fallu aussi rappeler que l'on multiplie quelque chose par autre chose.

Cette discussion a fait apparaître la nécessité d'écrire dans la règle qu'il faut multiplier à la fois le numérateur et le dénominateur par un nombre. Comme c'est le même nombre, nous avons convenu de mettre dans la règle « multiplier par un même nombre ».

<u>Question 5 : Par quoi pourrait-on remplacer les termes « quand on fait » et « ça donne » qui sont trop familiers ?</u>

Réponse et discussion : En lien avec la question 2, les élèves ont remplacé « on fait une fraction » par « on a une fraction ». Le terme « on trouve » est, lui, suggéré par le professeur. Ecrire « on trouve une fraction égale (à la première) » était difficile à comprendre et les élèves ont préféré écrire « une fraction qui est égale à la première ».

Finalement la première phrase qui a été modifiée au fil des questions et réponses données devient : « quand on a une fraction et qu'on multiplie le dénominateur et le numérateur par un / le même nombre, on trouve une fraction qui est égale à la première » :

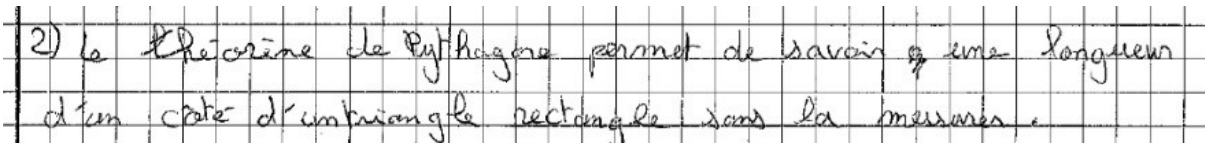


Les élèves n'étaient pas d'accord sur le choix à faire entre les expressions « un même nombre » ou « le même nombre » et ne faisaient pas la différence. Cela a été l'occasion d'une discussion riche sur ces deux articles indéfinis et les nuances de sens entre les deux expressions.

4. À quoi sert ?

Nous avons testé l'exercice consistant à faire écrire aux élèves un petit texte (quelques lignes) sur la façon d'utiliser un théorème, ou sur ce qu'il permet de calculer, de faire, de prouver.

Exemple de réponses à la question : « Écrire entre cinq et dix lignes sur le théorème de Pythagore »



2) Le théorème de Pythagore est un calcul qui permet de trouver une longueur dont on ne connait pas le chiffre.

exercice 1 : 1) Le théorème de Pythagore c'est ce que les mathématicien on trouver pour faire des calculs simple pour trouver le côte d'un segment (la longeur).

2) Le théorème de Pythagore est un théorème grec utiliser pour calculer le troisième coté d'un triangle grâce à ce signe : 4^2 ; 3^2 qui signifie : 4x4 ; 3x3. Cela se prononce "quatre au carré" ; "trois au carré".

5. « Atelier d'écriture »

Idée générale

Instituer sur l'année un « atelier d'écriture » dans la classe de mathématiques, une activité de démonstration, de formulation de démonstration.

Faire que les élèves se sentent (individuellement ou collectivement) responsables de leurs textes (auteurs ?), sentent qu'il y a bien un texte à écrire quand ils répondent aux questions d'un exercice de mathématiques.

Donner aux textes produits un statut collectif (présentations et critiques) et public (édition d'un répertoire).

Faire du travail de démonstration un travail d'écriture libre et, dans la mesure du possible, plaisant.

Niveau

Collège à partir de la classe de 4e, lycée, université.

Descriptif

1. Mise en place et entretien d'une liste de démonstration à écrire

Il semble difficile dans un premier temps de laisser les élèves complètement libres de choisir les démonstrations qu'ils vont travailler : risque de tomber sur des exercices à résoudre ou des propriétés à démontrer inadaptées au niveau des élèves ou aux objectifs de l'enseignant.

L'idée est donc de garder l'idée du choix des élèves, mais en le restreignant à une liste de démonstration à écrire (qui évolue au fil de l'année, qui peut être vide en début d'année, ou pré-remplie par l'enseignant).

La liste de démonstration à écrire est gérée dans la classe :

- Une première version de la liste peu être apportée par l'enseignant lors de la mise en place de l'atelier,
- La liste peut être augmentée au fil de l'enseignement par l'enseignant : « Ah, ce résultat on le met dans la liste pour l'atelier d'écriture », ou « La formulation de la solution de cet exercice mérite d'être retravaillée, on l'inscrit sur la liste », etc. La liste peut être initiée petit à petit de cette façon (sans apport a priori, cf. point précédent).
- Une fois l'atelier mis en place on peut imaginer que les élèves soient volontaristes. La liste peut être augmentée au fil du temps par les élèves eux-même (l'enseignant étant le garant que les idées correspondent bien a priori à un travail réalisable et intéressant). Ceci peut avoir lieu suite à un exercice, à une idée, etc.

Le choix des démonstration est bien sûr crucial. L'idée de l'atelier est de faire travailler la formulation, il serait donc dommage que les élèves n'aient pas le temps de travailler l'écriture faute d'avoir trouvé les idées clefs de la preuve, ou que l'enseignant soit obligé d'intervenir lourdement pour expliquer la preuve. Si nécessaire, pour alléger le temps de recherche par rapport au temps de rédaction, on peut aussi imaginer un système d'aide (une idée clef de la preuve est indiquée dans la liste avec le propriété à prouver), ou le travail sur la formulation des propriétés déjà abordées, mais dont la preuve avait été survolée et non rédigée.

En début d'année les preuves peuvent porter sur des résultats concernant des notions abordées les années passées.

2. Les temps réguliers et spécifiques d'atelier

Pendant un temps (une heure ?) régulier (toutes les deux semaines ?) un temps d'écriture est mis en place : les élèves travaillent seuls ou en petit groupe sur une recherche de preuve, et sur un texte de démonstration.

Les élèves choisissent la preuve qu'ils veulent travailler (et s'y tiennent ensuite).

L'enseignant agit bien sûr en fonction du niveau des élèves, de ses objectifs d'apprentissage, du temps disponible, comme pour une séance classique. Il peut répondre à des sollicitation, intervenir, aider, etc. L'aide portera plus volontiers sur l'idée de la preuve, les arguments qui pourraient manquer, le cas échéant sur la correction mathématique de ce qui est avancé. Les interventions sur la formulation seront plus limitées.

Le travail peut se poursuivre librement (éventuellement à la demande de l'enseignant) en dehors des cours.

3. Temps réguliers et spécifiques de lecture collective

Pendant un temps (une demi heure) régulier (toutes les deux semaines?) les élèves présentent leurs textes aux autres (vidéo-projeté ? photocopié ?). L'idée est ensuite d'améliorer collectivement le texte pour qu'il présente bien une preuve mathématique, soit compréhensible et agréable à lire.

L'enseignant est en retrait, mais peut participer à la discussion s'il le souhaite (notamment si un problème mathématique n'est pas mis au jour).

Suite à cette relecture, lors d'une future séance d'atelier les élèves pourront reprendre leur texte... pour le représenter. On peut aussi imaginer regrouper deux élèves ou deux groupes d'élèves ayant travaillé jusque là séparément, mais sur la même preuve et dont les formulations sont assez proches.

On peut imaginer d’autres modalité de relecture (qui peuvent se cumuler), l’objectif reste que l’auteur d’un texte voit que son texte est lu, est (ou non) compris, apprécié, etc. On peut imaginer des travaux en groupe ou individuels : relecture et annotation de textes d’autres élèves, voire relecture et proposition de réécriture, éventuellement présentation du texte de quelqu’un d’autre (et de commentaires).

4. Création et suivi d'un répertoire des démonstrations de la classe

À la fin des temps de lectures (point 3.) la classe gère le « Répertoire de l'atelier d'écriture » :

- décide des textes qui peuvent faire l'objet d'une publication (plusieurs démonstration d'un même résultat peuvent être publiées),
- décide, une fois que le nombre de texte le permet, de l'organisation des différents textes (rubriques en fonction du contenu, indication de la difficulté, etc.)

Le répertoire peut être numérique (ce qui permet de voir les preuves correspondant à des mots clefs, à des auteurs, à une difficulté, etc.), éventuellement mis en ligne (sur le site du collège par exemple).

On peut bien sûr imaginer la chose à une échelle un peu plus grande, avec plusieurs classes par exemple, ou avec le professeur de français. Ou insérer une rubrique mathématiques dans le journal du collège, etc.

-VII- Questions / réponses

Quelques questions sur le principe de ces expérimentations, quelques réponses :

Ne vaut-il pas mieux donner une phrase correcte que trois ? En effet, avec trois les élèves ont l'impression de pouvoir, du coup, dire ou écrire les choses comme ils veulent, que ça n'a pas une si grande importance.

Le principe est justement de pouvoir dire « Tu peux écrire les choses comme tu veux, si c'est correct », mais en ayant donné aux élèves les moyens de comprendre ce « c'est correct ». D'où l'importance de l'élaboration collective : la discussion permet aux élèves de vivre les incompréhensions, les ambiguïtés des premières formulations, et de s'approprier les motivations des tournures parfois complexes utilisées, et finalement de s'approprier les formulations.

La question rejoint cependant le point de vue d'Elisabeth Bautier qui dit que l'école (les programmes, les manuels) suppose plutôt qu'elle ne construit l'autonomie cognitive nécessaire à l'élève pour tirer partie des dispositifs mis en place et des ressources[6]. Mais là aussi on peut penser que l'idée de l'élaboration collective va dans le sens d'un apprentissage des règles de formulation, d'une prise de recul sur la compréhension.

Ne vaut-il pas mieux donner une phrase correcte que trois ? Les élèves ont déjà du mal à en retenir une.

Là aussi, arriver collectivement à l'élaboration des phrases (travailler par exemple une demi heure sur la formulation du théorème de Pythagore, sur des formulations du théorème de Pythagore proposées par les élèves, amandées, corrigées, etc.) est un gros travail d'apprentissage du contenu.

L'activité est chronophage.

L'investissement ne semble pourtant pas vain, le pari est que la demi heure passée sur la formulation d'une propriété, ou d'une définition, ou d'une démonstration, permet une meilleure acquisition de celles-ci, une meilleure compréhension du jeu auquel on joue en mathématique. Ce travail ayant des répercussions sur le bon déroulement du reste de l'activité des élèves.

N'hésitez pas à nous contacter pour nous communiquer vos questions, vos remarques, vos suggestions, vos expérimentations.

Écrire à : christophe.hache@univ-paris-diderot.fr

6 Ici par exemple : http://mc.univ-paris-diderot.fr/videos/?video=MEDIA151120095150816

-VIII- Annexes

Nombres relatifs

Alternative à l'activité « Qui perd gagne » (évoquée page 11) : « La kermesse ».

Une école organise une kermesse avec un jeu un peu particulier. Il y a quatre stands. Les trois premiers sont les suivants. Le quatrième ne fonctionne qu'à la fin de l'après midi.

- Le stand « Gagnez 10 points »
Si on gagne on obtient un jeton +10
et si on perd on obtient un jeton -5
- Le stand « gagnez 6 points »
Si on gagne on obtient un jeton +6
et si on perd on obtient un jeton -3
- Le stand « gagnez 4 points »
Si on gagne on obtient un jeton +4
et si on perd on obtient un jeton -2

1) Après deux parties on compare les sacs de plusieurs enfants, quel est le score de chacun ?

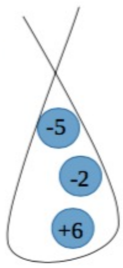
Virginie : +10 +4

Pierre : -2 +6

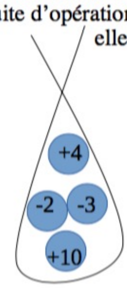
Julie : -5 +4

Marie : -5 -2

1) Voici le sac de jetons de Pierre après quelques parties. Écris une suite d'opérations permettant de calculer son score. Combien a-t-elle de points ?



2) Voici le sac de jetons de Virginie pendant l'après midi. Écris une suite d'opérations permettant de calculer son score. Combien a-t-elle de points ?



3) Un peu plus tard le sac de Julie contient les jetons suivants. Écris une suite d'opérations permettant de calculer son score. Combien a-t-elle de points ?

+ 4 +10 -2 -2 -5 -5

4) En fin d'après midi, quel est le score de Marie, Joris et Nathalie :

– Marie
+6 -5 -2 +6 -5 +4 +6 +4

– Joris
-3 +10 -2 +4 +6 +6 -3 +10 +6

– Nathalie
-5 -2 +10 -5 +4 -2 +10

5) Le soir les enfants peuvent, s'ils le souhaitent, passer au stand de « La main du Hasard » : une main innocente retire un jeton au hasard du sac du joueur.

La main du hasard retire un jeton -5 du sac de Marie. Quel est son score final ?

La main du hasard retire +6 du sac de Joris. Quel est son score final ?

Nathalie hésite… Que lui conseilles-tu ?