UNIVERSITE de POITIERS

Institut de Recherche
sur l'Enseignement des Mathématiques

Janvier 1989

A PROPOS DE DEMONSTRATION

ou

quelques idées d'activités pour (ré)apprendre à démontrer

J.C. THIENARD Animateur à l'IREM de POITIERS

avec la participation de

J.P. DELSALLE
H.L. MORITZ

S O M M A I R E

ANNEXES

A PROPOS DE DEMONSTRATION

ou quelques idées d'activités pour (ré)apprendre à démontrer

Avertissement

Le présent document résulte d'un travail qui était initialement centré sur les classes de A. Nous pensons néanmoins que le type de réflexion qui y est développé peut trouver des applications dans toutes les classes de lycée. Il serait en effet illusoire de croire que seuls les élèves des sections littéraires n'ont pas assimilé ce qui fait l'essence de la démarche démonstrative, le rôle et le fonctionnement des démonstrations, le moment où elles s'inscrivent dans une démarche de recherche de problème.

Nous pensons que dans l'état actuel de l'enseignement, peu d'élèves parviennent à cette compréhension. La substitution de l'enseignement de la géométrie par un enseignement de l'analyse fortement axé sur l'application de procédures algorithmiques est peut être une des causes de cette carence. Le résultat observable est qu'au sortir de la classe de Terminale C, peu d'élèves sont aptes à conduire un raisonnement par conditions suffisantes ; beaucoup confondent conditions nécessaires suffisantes, beaucoup ne maitrisent pas le sens de l'implication et de l'équivalence. Ces faits peuvent être masqués par le fait que des élèves studieux savent bien travailler - en automate - sur les situations stéréotypées qui leur sont proposées à longueur d'année, autrement dit, ils réussissent bien lorsqu'il s'agit de faire des mathématiques de façon algorithmique. Il n'en est plus de même lorsqu'ils ont à travailler sur des situations non déjà vues, même très simples (voir notes), ils sont alors perdus, incapables de contrôler ce qu'ils écrivent, à tel point que l'on peut se poser légitimement la question de savoir si ce qu'ils produisent a un **sens** pour eux.

Un des objectifs des activités proposées dans le présent fascicule est de faire en sorte que le **sens** ne puisse pas être oublié, qu'il puisse donc servir de garde fou contre les erreurs et les absurdités qui pourraient être produites au cours du travail.

Les exercices comportent pour la plupart une partie heuristique (travail sur le sens) dont le but est de conduire à une ou des conjectures. Celles ci émises, commence le jeu de leur validation ou de leur réfutation et donc de la mise en place de preuves, de démonstrations ou de contre exemples. Les phases algorithmiques des démonstrations conduisent à des résultats qui peuvent être alors contrôler en partie par les résultats partiels obtenus lors de la phase heuristique. Nous espérons qu'ainsi les élèves verront augmenter leur chance de découvrir ce qu'est l'activité mathématique, la nécessité qu'il y a de démontrer pour qu'une assertion puisse passer du statut de conjecture à celui de théorème.

Nous espérons enfin, qu'ils pourront comprendre, par la pratique ce qu'est démontrer, et qu'il pourront avoir ainsi matière à penser sur ce que penser veut dire.

Notes :

I] L'exercice suivant fut donné en terminale C en devoir surveillé au début de l'année.

Soit A l'énoncé

A : "si $-1 \leq x \leq 5$ alors $x^2 + n \geq 27$" $(x \in \mathbb{R})$

a) Quelle est la négation $\overline{A}$ de A
b) A, $\overline{A}$ est-il vrai ou faux ?

a) obtint 2 réponses justes sur 29
b) fut l'objet de 21 réponses absurdes du type A et $\overline{A}$ sont vrais (ou faux !) tous les deux.

Ceci prouve

1/ Que ce qui fonde la construction d'un contre exemple n'est pas assimilé.

2/ Que le connecteur "implique" est dépourvu de sens pour nombre d'élèves.

3/ Que prendre la négation d'un énoncé ou le fait que l'on raisonne en logique du tiers exclus ne signifie rien pour beaucoup, ce qui paraît assez grave à ce niveau.

Force est alors de constater que si faire des mathématiques c'est examiner si certains énoncés sont vrais ou faux, si un énoncé en implique un autre etc... peu d'élèves arrivent en terminale C en ayant déjà fait des mathématiques ! même s'ils ont la tête pleine (à vérifier) de savoir faire algorithmique.

II] Les exercices suivants ont été donnés en colle, en début de Math-sup :

A et B étant 2 parties de E donnés $(E \neq \phi)$.

Résoudre dans $\mathcal{P}(E)$ l'équation

a) $A \cap X = B$

b) $A \cup X = B$

Ils ont été l'objet d'absurdités, résultats d'un travail effectué sans référence au sens, de façon algorithmique et sans contrôle.

Voilà quelques-unes des productions (elles ont été recopiées mot pour mot !) qui ont été fournies :

1

$A \cup X = B$

${}^cA \cap (A \cup X) = {}^cA \cap B$

donc $X = {}^cA \cap B$

2

$A \cup X = B$

$A \cup X \subset B \Rightarrow X \subset B$

$B \subset A \cup X$

$B \subset A$ ou $B \subset X$

$X \subset A$ ou $B = X$

3

$A \cup X = B \Leftrightarrow \forall x \in A \cup X$

alors $x \in B$ et $\forall x \in B$

alors $x \in A \cup X$

$\Leftrightarrow A \cup X \subset B$

et $B \subset A \cup X$

$A \cup X \subset B \Leftrightarrow A \subset B$

et $X \subset B$

$\forall x \in A \cup X$ alors $x \in B$

d'où $X = A \cap B$.

Comprenne qui pourra !

Observations :

1/ L'idée de représenter la situation ne vient pas à l'esprit des élèves. Leur démarche ne comporte aucune démarche d'ordre heuristique pour essayer de voir quand il y a des solutions et quelle est leur forme.

2/ Il n'y a aucun contrôle des résultats, aucun doute pour savoir si toutes les solutions ont été trouvées, autrement dit aucun doute sur le fait que les différentes lignes sont des équivalences (bien que cela ne soit pas précisé). Ou bien pire : il n'y a pas à se poser la question, l'équivalence ayant toujours été utilisée de façon mimétique comme une formule magique.

3/ On observe de la surprise lorsqu'on demande : est-tu sûr du résultat ? Es-tu sûr d'avoir toutes les solutions et du désarroi lorsqu'on dit : "vérifie le".

Question : qu'est-ce qu'une démonstration ? Qu'est-ce que faire des mathématiques pour ces élèves ?

Brève histoire du document

Le présent fascicule a pour origine le travail d'un groupe IREM intitulé : *"l'enseignement des mathématiques en première et terminale A_2 et A_3"*

Le stage s'est déroulé en 86-87. Il comportait 3 séances de 3 heures.
Nombre de participants : 7

La première séance fut consacrée :

1. A l'exposé et à l'analyse des motivations et des attentes de chacun. Il en est essentiellement ressortit la difficulté éprouvée par les participants à enseigner dans ces classes, le constat que les activités traditionnelles se heurtaient au désintérêt des élèves, voire à des réactions de rejet et que chacun espérait trouver lors de ce stage quelques idées et activités qui lui permettraient de renouveler sa pédagogie, de (re)susciter (voire de ressuciter) l'intérêt des élèves, d'avoir le sentiment d'effectuer un travail utile.

2. A définir un thème de travail en rapport avec les attentes. Celui qui fut retenu au terme d'une discussion assez longue pourrait s'intituler (Re)introduction à la "notion de démonstration"!

Qu'est-ce qu'une démonstration ? Comment reconnaître un discours démonstratif d'un autre ? Pourquoi démontrer ? Qu'est-ce que le vrai en mathématique ? Coïncide-t-il avec le démontré ? A quelle époque, en quel lieu, dans quel contexte historique, social, philosophique, religieux... est-ce-que cette notion a pris naissance et à quelle fin ?

La seconde séance fut consacrée à étudier quelques textes (envoyés aux participants un mois avant celle-ci), propices à une réflexion sur divers aspects de la notion de démonstration et sur certains de ses avatars historiques :

- Textes extraits du corpus euclidien, qui fixèrent jusqu'à Hilbert, les canons de l'idéal démonstratif en mathématique.

- Le texte de Pascal *"de l'art de persuader"* qui porte en partie sur l'art de démontrer et sur les règles que doit satisfaire un discours pour mériter le nom de démonstration.

- Un texte de Hilbert sur les avantages comparés de la méthode axiomatique et de la méthode génétique pour la communication et le fondement du savoir mathématique.

- Textes de Pascal et de Poincaré sur le raisonnement par récurrence.

- Textes de Stevin, Bezout, Euler, d'Alembert, Carnot (cités dans un article de G. Glaeser sur l'épistémologie des nombres négatifs) portant sur la démonstration de la règle des signes et illustrant :

1/ la difficulté qu'ont parfois éprouvé des générations de mathématiciens à justifier leurs usages par voie démonstrative ;

2/ le fait, trop souvent ignoré, que des pseudos démonstrations ont pu avoir pour des durées assez longues statut de démonstration.

Ces textes ont également permis une réflexion sur les notions d'évidence, de vrai en mathématique, de rigueur d'une démonstration, et plus finement sur celle de niveaux de rigueur, utiles pour la suite du travail.

La troisième séance fut consacrée à classer et à élaborer selon une typologie préalablement fournie par l'animateur, des textes d'exercices propres à réaliser en partie les objectifs que le groupe s'était assigné.

Objectifs :

1. Mettre les élèves en position de comprendre, et de se convaincre de la nécessité de démontrer en mathématiques ;
soit parce qu'au terme d'une démarche de type heuristique des avis contraires ou différents étant apparus, il y a alors nécessité,
ou bien,
1/ de réfuter certains d'entre eux,
2/ de prouver celui qui éventuellement n'a pas été réfuté, c'est-à-dire de montrer qu'il ne pourra jamais faire l'objet d'une réfutation ;
soit parce-que le résultat n'étant pas "visible" (évident au sens cartésien), qu'il y a doute sur A ou non A et que seule une démarche démonstrative peut permettre de trancher.

2. Faire un inventaire des méthodes de démonstration rencontrées dans le cursus de l'enseignement secondaire et corrélativement faire s'interroger les élèves sur la nature du vrai en mathématique.

3. Mettre les élèves en contact avec des textes "historiques" afin de pouvoir :
a) analyser le fonctionnement d'une théorie hypothético-déductive constituée,
b) dans le cadre d'un travail interdisciplinaire avec le professeur d'histoire et de philosophie, aborder ou soulever le problème des relations - entre l'émergence et le développement des mathématiques, celui de la pensée rationnelle et philosophique, celui de la gestion rationnelle des problèmes de la cité, de l'état (dans la période grecque par exemple), d'une part - celui de la pensée scientifique au sens que ce terme acquiert à partir du XVIIème siècle d'autre part.

Dans ces perspectives, les activités ont été classées en cinq rubriques :
1/ Exercice nécessitant une recherche d'ordre heuristique puis une démarche de validation ou de réfutation de la conjecture émise.
2/ Exercices pour lesquels une algébrisation ou plus généralement une symbolisation permet une résolution économique.
3/ Exercices nécessitant une démarche démonstrative.
4/ Utilisation de textes historiques.
5/ Inventaire des méthodes de démonstration.

Nous n'avons pas cherché à faire un recueil d'exercices, ce qui explique que les chapitres soient courts. Notre propos se limite à donner quelques idées d'activités et quelques indications méthodologiques permettant, nous l'espérons d'atteindre l'objectif fixé. A notre avis, les notes ont plus d'importance que les texte d'exercices pour les commentaires d'ordre didactique qui y sont développés.

Ce document comme tout document IREM n'a pas la prétention de contenir "la vérité" sur ce qu'il faut faire ou ne pas faire. Il est une pièce versée au débat sur le problème de l'enseignement des mathématiques et n'aura d'intérêt que s'il peut servir de base aux réflexions et discussions sur ce sujet, ou donner quelques idées.

Toute critique ou réflexion sur ce document sera bienvenue.

S'adresser à :

IREM de POITIERS (J.C. THIENARD)
Avenue du Recteur Pineau
86022 POITIERS CEDEX

INTRODUCTION

Ou point de vue de l'animateur.

Un des objectifs fixé à l'enseignement des mathématiques en classe de première et terminale A_2 et A_3 est d'après l'introduction aux programmes :
"Une formation à la réflexion et à une démarche scientifique qui sera à la fois un complément à une formation littéraire approfondie et un terrain d'investissement d'une culture philosophique. C'est dans cet esprit d'une formation culturelle globale qu'une perspective historique sur quelques questions mathématiques pourra être introduite".

Un des moyens d'atteindre cet objectif est d'essayer de sensibiliser les élèves aux différentes étapes d'une démarche mathématique, aux moyens qu'elles mettent en oeuvre, au rôle particulier et spécifique des démonstrations. Là commence la difficulté, car les mathématiques telles qu'elles apparaissent dans les transpositions didactiques de l'enseignement traditionnel sont des mathématiques sans question et donc amputées d'un des termes de la dialectique dans laquelle la notion de démonstration trouve sa place naturelle, voire sa nécessité, à savoir la formulation de conjectures.

Le couple question-conjecture est la source de l'activité mathématique, il commande à la naissance des concepts, théories, démonstrations qui transforment des conjectures en théorèmes ou à la construction des contre-exemples qui conduisent à leur réfutation ou à leur rectification. Ce couple étant quasi-absent dans la pédagogie traditionnelle des mathématiques, il est très difficile à un débutant de comprendre ce qu'est une démonstration. Note 1

Une des raisons de la difficulté que peut éprouver un débutant à appréhender la notion de démonstration dans le cadre de l'enseignement traditionnel tient en partie au fait :

1. Que lorsqu'une activité commence par montrer que, établir que, démontrer que, vérifier que... il n'y a précisément rien à montrer, établir, démontrer...- *psychologiquement* - puisqu'il n'y a pas de place pour le doute et que l'élève ne se trouve donc pas en position d'avoir à convaincre ou à se convaincre, mais en position de restitution formelle et mimétique d'arguments ou d'algorithmes archi répétés par le maître. La démonstration demandée risque alors d'être vécue comme une activité rituelle voire magique dans la mesure où la fonction et le sens n'en sont pas saisis.

2. Que les premières démonstrations montrées aux élèves portent sur des points qui leur semblent évidents et risquent donc de bloquer pour longtemps la compréhension de la notion (voir texte de Pascal).

3. Que ces activités font suite à un cours dans lequel les concepts et procédures introduits, les démonstrations faites ne reposent sur aucune problématique explicite et viennent en réponse à des questions non posées.

Note 1 *La pédagogie dite moderne ne réussit pas mieux de ce point de vue ; les conjectures ne sont qu'apparence ; on amène l'élève à conjecturer ce que l'on veut bien qu'il conjecture, et surtout ces conjectures ont l'air gratuites sans problématique ; or en sciences, la conjecture naît de l'étude d'un problème.*

Un jour, M. Rabi parcourut les rues en criant ... "*j'ai une réponse. Qui a une question ?* (Histoire juive citée par R. Bkouche dans "Axiomatique - Formalisme - Théorie).**Note 2**

Chaque professeur a sans doute eu l'occasion de rencontrer des symptômes de cette incompréhension globale. Chaque professeur a vu maintes fois dans les démonstrations produites par les élèves - dans un cadre fortement stéréotypé et répétitif, ce qui limite et masque l'ampleur du mal - des discours truffés d'erreurs flagrantes ou d'absurdités non remarquées par leurs auteurs. Ceux-ci sont, à notre avis, non le résultat de l'inattention ou de l'incapacité à faire des mathématiques mais la preuve que l'élève produit un discours dont la fonction et donc le sens lui échappe, qu'en conséquence il n'a aucun moyen de contrôle de son propre dire. A la limite extrême,mais réelle et observable, ce discours n'a pour but que de répondre à la demande scolaire du maître, il est une preuve de A si de façon quasi magique et purement mimétique figure quelque part.... donc A ou alors A indépendamment de ce qui précède. **Note 3**

Devant la question, qui est apparue centrale aux membres du groupe : que vaut un cursus d'enseignement des mathématiques au terme duquel 70 ou 80 % des élèves (taux très optimiste pour les séries A) sortent avec quelques connaissances certes, mais en n'ayant rien compris à ce que démontrer veut dire, l'objectif premier que s'est fixé le groupe fut : "faire comprendre au plus grand nombre ce qu'est une démonstration" .

Des indications méthodologiques quant à la réalisation de celui-ci ont été données dans les pages précédentes et ne seront pas reprises ici.

Les difficultés de réalisation de cet objectif sont importantes et ne doivent pas être ignorées ou occultées. Elles sont de trois ordres :

1/ La faiblesse des élèves auxquels on s'adresse, qui impose l'élaboration d'activités d'un niveau très élémentaire (cette contrainte est très lourde en pratique comme ont pu l'éprouver les membres du groupe : 50 % au moins des propositions d'activités faites ont du être rejetées sur la base de ce seul critère).

2/ Difficulté à pouvoir travailler en inter-disciplinarité avec un professeur d'histoire ou de philosophie par exemple, comme exigerait la mise en place de la rubrique : "Utilisation de textes historiques".

3/ Etroitesse de la formation des enseignants de mathématiques qui laisse ceux-ci dans l'ignorance quasi-complète.
a) De l'histoire de leur discipline, de son fonctionnement historique, des grands problèmes autour desquels se sont édifiés les grands concepts etc...

Note 2 *Douter est difficile, par exemple, lors de l'étude de premières figures , en 4ème, celles-ci étant simples, il n'y a guère de place sur le doute quant aux résultats trouvés. En revanche, on devrait douter de l'universalité des résultats sur ce dessin ; je ne doute pas que les médianes du triangle sont concourantes mais si j'en fais un autre, puis un autre, etc... ?*
Mais le doute ne peut s'instaurer que si, implicitement au moins, l'élève a compris la différence d'attitude entre le géomètre de terrain et le mathématicien. Le premier, sur un dessin soigné peut dire ; je décrète que ces 3 points sont alignés, vue la précision à laquelle je travaille, ou dire le contraire. Celui qui fait des mathématiques ne peut dire a priori ni l'un ni l'autre parce qu'il est dans un autre système de vérités ; les dessins ne sont pour lui que des représentations des objets abstraits sur lesquels portent ses interrogations ; la constatation expérimentale lui est donc interdite puisque faite sur des objets (les représentations) qui ne sont pas ceux sur lesquels portent son raisonnement. Le dessin permet la conjecture non l'affirmation. A laisser s'instaurer la confusion entre ces différents niveaux les pédagogues modernes qui ont inspiré les programmes de 4ème commettent autant d'erreurs que les traditionnels.

Note 3 *Chacun peut se livrer à l'expérience suivante : Exercice : établir A en donnant A faux et observer que néanmoins 80 % de la population testée produit une démonstration de A. bla... bla DONC A !*

b) De la façon dont fonctionne la mathématique qui se fait, de l'origine des questions qui se posent, du fonctionnement de la dialectique validation - réfutation au sein de la communauté mathématique.
c) Des grandes controverses, des grandes crises qui ont ponctué l'histoire des mathématiques, des conceptions philosophiques quant à la nature des objets mathématiques ou de certains types de raisonnement (tiers exclu par exemple dès qu'intervient l'infini) qui les sous-tendent.
d) De la place de la pensée mathématique dans la pensée scientifique, ou dans l'histoire de la pensée rationnelle.

Notons pour terminer qu'un travail sur ce thème est utile et nécessaire.

1/ S'il peut permettre à un plus grand nombre d'élèves de comprendre :
a) Ce qu'est une théorie logico-déductive, le statut des différents types d'énoncés, définitions, axiomes ou demandes...théorèmes qui le constituent.
b) Le rôle et les règles de fonctionnement du discours démonstratif.
c) La nature du vrai produit à l'intérieur d'une théorie mathématique.
d) Corollairement ce qu'est la mathématique, ce que sont les objets d'étude, d'avoir une idée de ses champs d'application dans d'autres domaines du savoir scientifique ou non, de sa spécificité.

2/ S'il fournit une occasion de réfléchir sur les lacunes de l'enseignement actuel des mathématiques et sur celles de la formation des maîtres.

CHAPITRE I

DE l'IMPORTANCE DE L'HEURISTIQUE
ou
Exercices nécessitant une recherche d'ordre heuristique puis une démarche de validation ou de réfutation de la conjoncture émise.

Etant donné un objet mathématique : une suite de nombres, les valeurs prises par une fonction, une configuration géométrique... une question Q (ou des questions Qi) étant posée(s) ou faisant suite à des observations, remarques..., quelques tests exploratoires conduisent à penser que l'assertion A réponse à Q est plausible ou hautement probable voire vraie. La question qui se pose alors est : la conjecture A est-elle vraie ? Ou ce qui est équivalent : a-t-elle statut de théorème ? Cette question est d'autant plus cruciale qu'au sein du groupe d'élèves des conjectures différentes, voire contradictoires ont pu être émises. Il convient donc de les examiner, de discerner celles qui sont contradictoires, celles qui s'impliquent ou sont équivalentes puis de procéder à leur réfutation ou à leur validation.

Peu à peu les élèves doivent comprendre que :

1/ Plausible ou très probable (domaine de l'opinion raisonnée) ne signifie pas vrai (domaine du démontré).

2/ Non réfuté ne signifie pas validé, c'est-à-dire que si aucune réfutation n'a été trouvé au temps t dans le groupe G , rien ne prouve qu'il en sera encore ainsi au temps $t' > t$ ou dans un autre groupe G' .

3/ Que le seul moyen de s'assurer que la conjecture examinée est vraie, autrement dit ne fera jamais l'objet d'une réfutation, est de la prouver et que telle est la fonction des démonstrations en mathématiques. Note 4

4/ Qu'un discours démonstratif obéit à des règles, qu'il s'articule autour de définitions qui donnent sens aux concepts utilisés et de résultats connus (théorèmes, axiomes) via des règles de déduction.

Qu'une démonstration, chose humaine, peut être sujette à erreurs non discernées par un groupe de lecteurs donnés. Que les erreurs peuvent être de plusieurs types :
- erreurs matérielles telles que fautes de calcul ;
- erreurs de raisonnement dues à une faute de logique ou à l'utilisation d'un résultat faux (souvent admis comme évident sans esprit critique en cours de démonstration) ;
- erreurs plus subtiles ayant leurs source dans une intuition erronnée intervenant dans la démonstration et se situant le plus souvent dans le non explicite, ou provenant d'un langage, de représentations fausses.

Note 4 *L'affirmation développée en 3) manque évidemment de nuance mais suffit en première approximation au niveau où l'on se place. L'histoire des mathématiques fourmille de résultats démontrés qui furent ensuite réfutés, ou de démonstrations validées à l'époque de leur auteur et jugées insuffisantes voire fausses aux époques ultérieures : voir par exemple certains résultats arithmétiques de Fermat (les nombres* $2^{2^n} + 1$ *sont premiers). Les démonstrations "du postulat d'Euclide" de Legendre, certaines démonstrations d'Euler, de Cauchy, etc...*

Les quelques textes d'activités proposés ci-dessous, d'un niveau mathématique très élémentaire, doivent être utilisés selon le schéma qui vient d'être décrit, dans la perspective d'essayer de faire comprendre à ces élèves souvent faibles en mathématique

1/ La fonction des démonstrations en mathématiques, leur rôle dans le processus de validation des résultats, c'est-à-dire leur rôle de garde fou, ainsi que quelques rudiments relatifs au fonctionnement du discours démonstratif.

2/ Que faire des mathématiques, c'est en permanence exercer son esprit critique, sa vigilance, et à un niveau supérieur son esprit créatif. Note 5

EXERCICE 1

Quels sont les diviseurs de $n^2 + n + 41$ pour $n = 1, 2, 3, 4$.........
Pouvez-vous émettre une conjecture ? Si oui formuler la et communiquer la (autrement dit faites la entrer dans un processus de validation-réfutation) en faisant valoir éventuellement vos arguments.

EXERCICE 2

Soit la conjecture A suivante :
A : "Aucun des nombres $2n^2 + 3n + 1$ n'est premier pour $n \geq 1$"
Valider ou réfuter A .

EXERCICE 3

On considère un quadrillage régulier.

1/ Si l'on prend deux points A et B le milieu de (A, B) est-il nécessairement un point du quadrillage ?

2/ Si l'on prend trois points (A, B, C) le milieu de l'un des bipoints que l'on peut former est-il nécessairement sur le quadrillage.

3/ Même question avec quatre points.

Note 5 *Les mathématiques étant production humaine, les textes produits étant exprimés en partie dans les langues vernaculaires, rejetant de plus souvent dans l'implicite nombre d'éléments du raisonnement supposés connus ou triviaux etc... le sans erreur est impossible, mais l'expérience de XXIII siècles de productions mathématiques prouve que les mathématiques ne sont jamais fondées de façons durable sur des erreurs ou des lacunes, que les outils insuffisants, autrement dit qui n'ont pas été dotés d'un statut mathématique satisfaisant ont toujours été soit rectifiés, soit éliminés quels que soient les résultats qu'ils ont permis d'obtenir (voir par exemple*
1. Les indivisibles de Cavalieri dont Pascal a fait un usage subtil et créateur ;
2. Les infinitésimaux de Leibniz, Newton... qui ont permis la création du calcul infinitésimal et intégral. - qui ont été éliminés par l'histoire.
3. La théorie des ensembles de Cantor qui n'a pas été conservée sous sa forme originelle puisqu'elle conduisait à des paradoxes, mais qui rectifier sous la forme axiomatique de Zermelo - Fraenkel a eu le destin que l'on sait).
Bourbaki dans son introduction prétend néanmoins que la production de textes mathématiques parfaits (sans erreur et intemporel) est pensable, puisqu'il est théoriquement possible de formaliser entièrement le discours, mais ajoute aussitôt qu'un tel discours serait illisible (et donc incontrôlable). Il en résulte que la capacité de produire un discours mathématique parfaitement contrôlable en toute ses étapes, reste donc au niveau du mythe.

4/ Même question avec plus de quatre points.

(On pourra remarquer que si l'on prend un point du quadrillage pour origine, que les points du quadrillage sont alors repérés par un couple (x, y) , $x \in Z$; $y \in Z$

EXERCICE 4

On considère la suite des entiers et la suite de leurs carrés

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13-
n^2	0	1	4	9	16	25	36	49	64	81	100	121	144	169....

Quelles conjectures A_i peut-on émettre à propos du chiffre des unités de n^2 ?

Valider ou réfuter les conjectures A_i .

EXERCICE 5

Soit p un nombre premier $p > 1$
On considère l'affirmation suivante :

A : parmi les triangles rectangles dont les côtés ont pour longueur des entiers, il en existe qui ont une hypoténuse de longueur p.

Valider ou réfuter A.

EXERCICE 6

Peut-on avoir $n^2 + n$ carré d'un entier (n entier) ?

EXERCICE 7

Soit l'affirmation
A : "Il y a au moins 10 entiers n tels que $2^n < n^2$ "

Est-elle vraie ou fausse ?

Si elle est fausse, la rectifier et prouver la nouvelle affirmation que vous venez d'énoncer.

EXERCICE 8

A : "On peut trouver un entier $\underline{n}$ tel que $n^2 + n + 1$ soit pair"
Lequel des deux énoncés A ou $\overline{A}$ vous paraît le plus plausible ?
Prouver A ou $\overline{A}$.

La réfutation de A est-elle une validation de $\bar{A}$?
La validation de A est-elle une réfutation de $\bar{A}$?

B : "On peut trouver un entier n tel que $n^2 + n + 1$ soit impair"

C : "$n^2 + n + 1$ est impair pour tout entier n"

Quelles relations logiques a-t-on entre A, $\bar{A}$, B, C
Donner leur valeur de vérité (c'est-à-dire indiquer ceux qui sont vrais et ceux qui sont faux).

EXERCICE 9

Etant donné 4 points formant un quadrilatère
Démontrer ou réfuter les énoncés A, B suivants :
a) A : "On peut trouver un point équidistant des 4 sommets ?
b) B : "On peut trouver un point équidistant des 4 côtés.

EXERCICE 10

On considère les nombres de la forme $2^n - 1$, n étant un entier supérieur ou égal à 2.

1/ Calculer les nombres $2^n - 1$ puis leur reste de division par 3 pour n = 2, 3, ..., 10

Quelle(s) conjecture(s) pouvez-vous émettre concernant le reste de division par 3 des nombre $2^n - 1$.

Soit Q_1 , la question "$2^{103} - 1$ est-il divisible par 3 ?"
Pouvez-vous émettre une opinion raisonnée sur le résultat ?
Votre justification est-elle une preuve ? Expliquez votre réponse.
De même pour Q_2 : "$2^{234} - 1$ est-il divisible par 3 ?"

2/ Soit a un entier dont le reste de division par 3 est 1.
Quel est le reste de division par 3 de 4 a ?
Quel est le reste de division par 3 des nombres $4^k - 1$?
Quel est le reste de division par 3 des nombres $2^{2k} - 1$?
Quel est le reste de division par 3 des nombres $2^{2k+1} - 1$?

Quels théorèmes peut-on énoncer ?

Reprendre les questions Q_1 et Q_2 .

EXERCICE 11

Soit 2 droites D et Δ orthogonales et un segment AB de longueur l
Quel est l'ensemble des milieux M de A, B lorsque A varie sur D et B sur Δ .

Notes

1/ Les premiers nombres calculés sont tous premiers (en fait ils sont premiers pour $n = 1, 2......39$) ce qui peut laisser supposer qu'ils sont tous premiers !

Les plus perspicaces verront peut-être que si $n = 41$
$n^2 + n + 41 = 41^2 + 41 + 41 \times 43$

Pour $n = 40$ $\quad n^2 + n + 1 = 41^2$.

L'émission de la conjecture "les nombres $n^2 + n + 41$ sont premiers" doit permettre de sensibiliser les élèves à la différence qu'il y a entre une conjecture et un théorème, à savoir l'une est un énoncé plausible, que l'on a de bonnes raisons de croire vrai, l'autre est un énoncé pour lequel on peut produire une démonstration.

Le contre exemple apporté à la conjecture doit permettre aux élèves de comprendre la nécessité de démontrer les énoncés que l'on produit et utilise en mathématiques : Tout énoncé non démontré, si plausible soit-il, est fragile puisqu'il risque à tout moment d'être anéanti avec toutes les conséquences qu'on aura pu en tirer, par un contre exemple.

Démontrer l'énoncé pour être sûr qu'il est à l'abri de toute réfutation.

2/

n	1	2	3	4	...
$2n^2 + 3n + 1$	6	15	28	45	...
diviseur	2	5	4	5	...

La conjecture semble plausible... comme précédemment. Est-elle vraie ? Certains demanderont à être convaincus, vue l'expérience précédente ! Car qu'est-ce qui prouve que pour une grande valeur de n, peut-être inaccessible $2n^2 + 3n + 1$ n'est pas premier.

Il suffit alors d'établir que $(2n^2 + 3n + 1) = (n + 1)(2n + 1)$ ($2x^2 + 3x + 1 = 0$ pour $x = -1$ ou $x = -\frac{1}{2}$) pour démontrer le résultat.

a) Démontrer l'énoncé pour convaincre ou se convaincre de sa validité

b) Démontrer l'énoncé pour établir son caractère de vérité universelle

3 / a) non $A(0, 0)$ $B(1,1)$
b) non $A(0, 0)$ $B(1, 0)$ $C(0, 1)$
c) non $A(0, 0)$ $B(1, 0)$ $C(D,1)$ $D(1,1)$
d) On est amené à conjecturer "oui" à force d'essais mais qu'est-ce qui prouve qu'on ne peut pas tomber sur un contre exemple

Rappel : $A(x_A, y_A)$ $B(x_B, y_B)$ I milieu de (A, B)

$$I\left(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2}\right)$$

I $\in$ quadrillage si et seulement si $x_A + x_B$ et $y_A + y_B$ sont pairs ; autrement dit si et seulement si (x_A , x_B) d'une part ; (y_A , y_B) d'autre part sont de même parité.

Désignons par I impair et p pair.

Si on se donne 4 points tels que 2 d'entre eux n'aient pas leur milieu sur le quadrillage on a :

(I, I) (I, p) (p, I) (p, p)

si on se donne un 5ème point il vérifie les conditions précédentes avec l'un des points précédents puisque ses coordonnées sont

(I, I) ou (I, p) ou (p, I) ou (p, p)

4/ On peut émettre 2 conjectures

A_1 "le chiffre des unités de n^2 ne peut être que 0, 1, 4, 5, 6, 9"

A_2 "la suite des chiffres des unités de n^2 se répète indéfiniment selon la séquence
0 1 4 9 6 5 6 9 4 1 0 qui est symétrique par rapport à 5"

$n = 10\,k + u \qquad n^2 = 100\,k^2 + 20\,ku + u^2$

d'où n^2.............

Cette remarque suffit à la preuve des 2 conjectures.

5/ A est faux comme on le voit après avoir essayé avec $p = 7$

6 /

n	0	1	2	3	4	5	6	7	...
n^2	0	1	4	9	16	25	36	49	...
$n^2 + n$	0	2	6	12	29	30	42	56	...

La comparaison des nombres $n^2 + n$ avec ceux de la ligne du dessus conduit à la conjecture selon laquelle les nombres $n^2 + n$ ne sont pas des carrés.

Preuve :

$$n^2 < n^2 + n < (n + 1)^2 .$$

7 /

n	0	1	2	3	4	5	6	...
n^2	0	1	4	9	16	25	36	...

2^n	1	2	4	8	16	32	64	...

Il semble que $2^n > n^2$ si $n \geq 5$ et donc que la conjecture est fausse.

La démonstration se fait par récurrence sur n

$2^n > n^2$ pour $n = 5$

si $2^n > n^2$ alors $2^{n+1} > (n+1)^2$

car $2^{n+1} = 2 \times 2^n > 2n^2 > (n+1)^2$ pour $n \geq 5$....

On peut énoncer

1 / $2^n < n^2$ pour $n = 3$

2 / $2^n > n^2$ pour $n = 1, 2$ et $n \geq 5$.

8/ La vérité de A semble peu probable autrement dit la vérité de $\overline{A}$ semble très probable ($n^2 + n + 1$ est impair pour $n = 1, 2, ...$)

Pour réfuter A on va prouver $\overline{A}$. La démonstration repose sur l'argument simple : n^2 et n ont même parité
d'où $n^2 + n$ est pair

Ce qui implique que $n^2 + n + 1$ est impair.

On a évidemment A implique B
et A équivaut à C (même signification)

9 / a) A est faux, comme il est facile de le voir avec quelques réalisations de figures. La preuve se fait par construction d'un contre-exemple. On donne un cercle et 3 points A, B, C de ce cercle. Si O est le centre du cercle, on a alors OA = OB = OC = R si D est extérieur du cercle, alors OD > R

b) On procède de la même manière pour B

10 /

n	2	3	4	5	...
$2^n - 1$	3	7	15	31	...
r_n	0	1	0	1	...

r_n = reste de division par 3 .

Le tableau conduit aux conjectures.

A_1 : le reste de division par 3 de $2^n - 1$ est 0 si n est pair.

A_2 : le reste de division par 3 de $2^n - 1$ est 1 si n est impair.

Sur la base de ces conjectures, il est hautement probable que $2^{103} - 1$ n'est pas divisible par 3 et que $2^{234} - 1$ l'est.

Autrement dit, si les conjectures A_1 et A_2 sont vraies, alors Q_1 reçoit la réponse non ; Q_2 reçoit la réponse oui .

Le raisonnement précédent est une preuve hypothéco-déductive
Si p alors q .
La vérité de la conclusion q est alors liée à la vérité de la prévision p .

On aura donc une démonstration des réponses apportées à Q_1 et Q_2 si on peut établir la vérité des énoncés A_1 et A_2.

$a = 3q + 1$

$4a = 12q + 4 = 3\,(4q + 1) + 1$
ce qui prouve que a et 4a ont le même reste 1 de division par 3 .
$4^k - 1$ est donc divisible par 3 .
Puisque 4, 4^2, 4^3, ... 4^k ont 1 pour reste de division par 3 d'après ce qui précède.

Or $4^k - 1 = (2^2)^k - 1 = 2^{2k} - 1$

$2^{2k+1} = 4^k \times 2$ or $4^k = 3q + 1$

d'où $2.4^k = 6q + 2 = 3(2q) + 2$

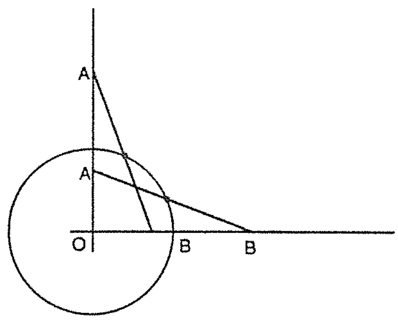
et $2.4^k - 1 = 2^{2k+1} - 1 = 3(2q) + 1$

Ceci prouve que les nombres $2^{2k} - 1$ sont divisibles par 3 : A_1 et que les nombres $2^{2k+1} - 1$ admettent 1 pour reste de division par 3 : A_2

11/ La situation peut être aisément matérialisée en traçant D et Δ , en se donnant AB à l'aide d'une règle ou d'une portion de règle et en marquant le milieu M de A .

En faisant glisser A sur D et B sur Δ on arrive rapidement à la conjecture que M décrit un cercle de centre O .

La preuve utilise alors le fait que dans le triangle rectangle AOB , MA = MB = OM (théorème).



CHAPITRE II

DE l'UTILITE DES SYMBOLES
ou
Exercices pour la résolution desquels il est fait usage de modes d'expressions symboliques

Les exercices proposés ci-après auraient pu figurer au chapitre I. Une première approche d'ordre heuristique paraît d'ailleurs souhaitable puisqu'elle permet de trouver des éléments de réponse à la question posée et fournit des moyens de contrôler les résultats obtenus ; néanmoins ils possèdent la spécificité que leur solution est facilitée par une résolution par l'algèbre selon une terminologie ancienne. Nous préférons à ce terme, celui de résolution par utilisation du mode de pensée symbolique. Ce mode de pensée, introduit par Descartes dans sa géométrie de 1637 et rendu possible par la création par Viète du calcul littéral à la fin du XVIème siècle, est un outil intellectuel d'une grande puissance. Il convient, c'est l'un des objectifs principaux de ce chapitre, d'en dégager les caractéristiques, le mode de fonctionnement, et d'essayer de faire comprendre l'intérêt des algorithmes du calcul algébrique en relation avec l'économie de pensée qu'ils permettent de réaliser.

Un problème, une question étant posée

1/ Les grandeurs intervenant et leur relations, données (hypothèses) ou connues (théorèmes) sont représentées de façon symbolique par des lettres, des égalités, inégalités etc... Résoudre ces problèmes revient alors à trouver les valeurs ou relations que doit satisfaire un certain symbole.

2/ On fait agir les algorithmes connus de résolution d'équations, d'inéquations, d'étude de fonctions... pour parvenir à l'expression des quantités ou relations cherchées.

3/ On réinterprète les résultats en revenant au sens donné aux symboles dans 1/ et on conclut.

Il paraît intéressant de faire ressortir que les opérations de la phase 2 s'effectuent de façon "mécanique" et donc sans référence au sens donné aux symboles. Le retour au sens se fait en 3/ et la réinterprétation des symboles doit être l'occasion de contrôler les résultats par usage au "bon sens" et en faisant référence aux indications obtenues lors de la phase heuristique.

EXERCICE 1

A] Trouver les nombres entiers, s'il y en a, dont le cube est égal au quadruple

B] Trouver les nombres entiers, s'il y en a, dont le cube est supérieur au quadruple

C] Trouver les nombres entiers, s'il y en a, dont le cube est égal au quintuple

D] Trouver les nombres (non nécessairement entiers) dont le cube est égal au quintuple.

Pour l'exercice suivant, l'unité est supposée fixée une fois pour toutes.

EXERCICE 2

A] Peut-on trouver des rectangles dont l'aire soit égale au périmètre ? (Plus précisément : dont l'aire et le périmètre sont mesurés par le même nombre).

B] Même question, mais on impose de plus aux côtés d'être mesurés par des entiers.

C] Quels sont les carrés réalisant la condition précédente ?

D] Quels sont les carrés dont l'aire est inférieure au périmètre ?

EXERCICE 3

On considère un cercle et un carré de même périmètre, peuvent-ils avoir la même aire ? Sinon laquelle de ces 2 surfaces a l'aire la plus grande, dans quelles conditions ?

EXERCICE 4

Parmi les losanges de côtés 1, y en-a-t-il un dont l'aire soit maximum ? minimum ? Peut-on le construire ?

EXERCICE 5

Parmi les triangles rectangles dont les côtés de l'angle droit ont pour mesure x et y, y en a-t-il dont l'aire soit égale au périmètre ?

Sinon laquelle de ces deux grandeurs est la plus grande ? Dans quelles conditions ?

Notes

1/ Cet exercice très simple a pour but de mettre en place les éléments de la méthode qui sera utilisée dans ce chapitre.

A] a) Phase heuristique :

n	0	1	2	3	...
4^n	0	4	8	12	...
n^3	0	1	8	27	...

Deux solutions apparaissent et vu ce que l'on peut observer des croissances comparées de $4n$ et de n^3, on peut conjecturer que 0 et 2 sont les seules solutions :

b) * Le problème se traduit symboliquement de la manière suivante :
Soit n un entier. n répond à la question si et seulement si $n^3 = 4n$.

* Phase algorithmique

$n^3 - 4n = 0$ $\quad\quad$ $n = 0$ ou $n = 2$

* 0 et 2 sont les seuls entiers dont le cube est égal au quadruple.

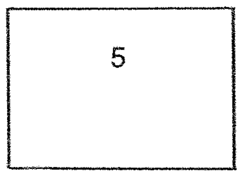
On a le même traitement pour B] et C] .
Il convient de faire remarquer que pour D] la démarche démonstrative est nécessaire dans la mesure ou la phase heuristique (expérimentée en classe) ne fournit pas en général d'indications satisfaisantes.

2 /

A] a) Phase heuristique

$p > S$

$p = 12 \quad S = 5$



$p < S$

$p = 18 \quad S = 20$

Dans le processus de déformation continue "il doit y avoir un rectangle au moins tel que S = p". Il y a bonne chance pour que la plupart des élèves ne puisse pas en dire plus.

1. Le problème se traduit symboliquement de la manière suivante :
Soit x et y les longueurs des côtés
$p = 2(x+y)$
$S = xy$.

Peut-on trouver x et y tels que :
$2(x + y) = xy$ (1)

2. Phase algorithmique.
Cherchons si x étant fixé on peut trouver y vérifiant (1)

$2(x+y) = xy$........ équivaut à $y = \dfrac{2x}{x-2}$ $\quad x > 2$

contrôle $\quad xy = \dfrac{2x^2}{x-2} \qquad 2(x+y) = 2\left(x + \dfrac{2x}{x-2}\right) = \dfrac{2x^2}{x-2}$

3. Il y a une infinité de rectangles répondant à la question. Leurs côtés ont des mesures supérieures à 2 et si x est la mesure de l'un d'eux $\dfrac{2x}{x-2}$ est la mesure de l'autre.

B] On cherche s'il est possible de réaliser
$y \in N$ si $x \in N$

ie : $\frac{2x}{x-2} \in N$ si $x \in N$

a) Phase heuristique :

x	3	4	5	6	7	8	9	....
$\frac{2x}{x-2}$	6	4	$\frac{10}{3}$	3	$\frac{14}{5}$	$\frac{8}{3}$	$\frac{18}{7}$	....

Trois rectangles sont solutions (3,6) (4,4) (6,3)

Comme de plus $y > 2$ d'après ce qui précède et qu'il semble que $x \to \frac{2x}{x-2}$ soit décroissante ou peut conjecturer ce que sont les seules solutions

b) On montre que $x \to \frac{2x}{x-2}$ est décroissante de $]2, +\infty[$ dans $]2, +\infty[$ ...

ou on remarque que $\frac{2x}{x-2} = \frac{x-2+4}{x-2} = 2 + \frac{4}{x-2}$ et que $\frac{2x}{x-2}$ est entier si et seulement si $\frac{4}{x-2}$ est entier. Autrement dit si et seulement si $x-2$ divise 4 ;

ce qui équivaut à $x - 2 = 1$ ou $x - 2 = 2$ ou $x - 2 = 4$ d'où $n = 3$ ou $n = 4$ ou $n = 6$.

C] L'étude faite en B] fournit un carré répondant à la question (4, 4) une rapide exploration convainc que c'est le seul.

a) $x^2 = 4x$
b) $x^2 - 4x = 0$ .... $x = 4$
c) (4, 4) est le seul carré répondant à la question.

D] $x^2 < 4x$ .... même traitement.

3 / a) L'exploration heuristique nécessitant la mise en équation du problème ne présente donc aucun intérêt a priori.

b) Soit un cercle de rayon R , un carré de côté a , tels que $2 \pi R = 4a$.

Le problème est alors celui de la comparaison des nombres a^2 et πR^2

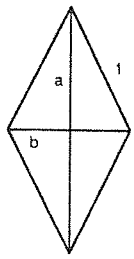
On prend comme paramètre $a = \dfrac{\pi R}{2}$

$$a^2 = \frac{\pi^2 R^2}{4} > R^2 \quad \text{puisque} \quad \frac{\pi^2}{4} > 1 .$$

4 / Cet exercice est un peu plus savant, dans la mesure où il nécessite quelques connaissances des propriétés du losange, qui devront si besoin est faire l'objet d'un rappel.

Problème n° 1 :
Comment différencier, caractériser deux tels losanges. On introduit alors la longueur des demi-diagonales a et b .

Les diagonales étant perpendiculaires on a $a^2 + b^2 = 1$.



et $S = 4ab$.

Le problème est alors :
Peut-on trouver a et b tels que :
$a^2 + b^2 = 1$
$ab = S$ soit maximum, minimum ?

Remarque : ab maximum (ou minimum) équivaut à $a^2 b^2$ maximum (ou minimum)

or $a^2 b^2 = a^2(1 - a^2) = a^2 - a^4$

On étudie $f(a) = a^2 - a^4$ sur $]0, 1[$

$$f(a) = 2a(1 - 2a^2)$$

$a = b = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ $\quad S = 1$

a	0	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1
f'(a)	+	0	-
f(a)	0 ↗		↘ 0

Un losange réalise l'aire maximum : c'est le carré.
Aucun losange ne réalise l'aire maximum.

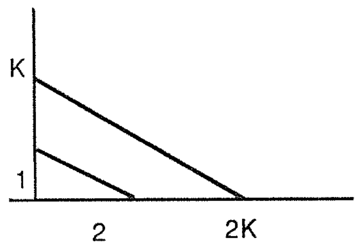
5 / a) Une rapide exploration

n	1	1	100
y	1	2	100
$\sqrt{x^2 + y^2}$	$\sqrt{2}$	$\sqrt{5}$	$\sqrt{20.000} \simeq 141$
$\frac{xy}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	5000
p	$2 + \sqrt{2}$	$3 + \sqrt{5}$	$200 + \sqrt{20.000} \simeq 341$

Conduit à l'observation que $p < S$ si x et y sont petits et que $S > p$ si x et y sont grands et à la conjecture que partant d'un triangle rectangle donné, par agrandissement continu, il existe une configuration pour laquelle $S = p$.

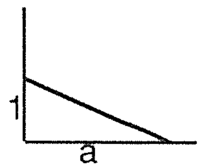
Exploration plus approfondie :

x	k
y	2k
$\sqrt{x^2 + y^2}$	$k\sqrt{5}$
$\frac{xy}{2}$ =	k^2
p	$3k + k\sqrt{5}$



$k^2 \leq 3 + \sqrt{5}$

On a donc	$S < p$	si	$k < 3 + \sqrt{5}$
	$S > p$	si	$k > 3 + \sqrt{5}$
et	$S = p$	pour	$k = 3 + \sqrt{5}$



Plus généralement

x	1	k
y	a	ka
$\sqrt{x^2 + y^2}$	$\sqrt{1 + a^2}$	$k\sqrt{1 + a^2}$
$\frac{xy}{2}$	$\frac{a}{2}$	$k^2 \frac{a}{2}$
p	$1 + a + \sqrt{1 + a^2}$	$k(1 + a + \sqrt{1 + a^2}$

S ≤ p équivaut à $k^2\frac{a}{2} \leq k(1 + a + \sqrt{1 + a^2}$

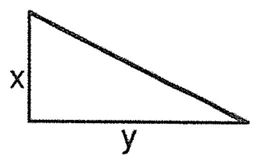
équivaut à $k \leq \frac{2(1+a+\sqrt{1+a^2})}{a}$

d'où $S = p$ si et seulement si $k = \frac{2(1+a+\sqrt{1+a^2})}{a}$

1. Il y a une autre façon de poser le problème

Peut-on trouver x et y tels que $S = p$?
avec $S = \frac{xy}{2}$ et $p = x + y + \sqrt{x^2 + y^2}$

2. Phase algorithmique :



S = p équivaut à $\frac{xy}{2} = x + y + \sqrt{x^2 + y^2}$

équivaut à $xy - 2(x+y) = 2\sqrt{x^2 + y^2}$

équivaut à $x^2y^2 + 4(x+y)^2 - 4xy(x+y) = 4(x^2 + y^2)$

équivaut à $x^2y^2 + 8xy - 4xy(x+y) = 0$

équivaut à $xy + 8 - 4(x+y) = 0$

équivaut à $y = \frac{4(x-2)}{x-4} > 4$

3. Interprétation - Conclusion

Ce qui prouve que la condition $S = p$ ne peut être réalisée que si l'un des côtés de l'angle droit à une mesure supérieure à 4 et que x étant fixé $(n > 4)$ il y a un triangle rectangle qui répond à la question.

S > p équivaut à $xy + 8 - 4(x+y) > 0$

équivaut à $y > \frac{4(x-2)}{x-4} \quad x > 4$

Test du résultat

$x = 6 \qquad y = 8 \qquad S = p = 24$

$x = 10 \qquad y = \frac{16}{3} \qquad S = p = \frac{80}{3}$

CHAPITRE III

QUAND LA DEMARCHE DEMONSTRATIVE S'IMPOSE D'EMBLEE
ou
Exercices dont la résolution nécessite d'emblée une démarche démonstrative

Les questions proposées dans cette rubrique ne sont susceptibles de recevoir un résultat ou une valeur de vérité que si une démonstration a été élaborée au préalable, conduisant précisément à la réponse. Ce type de question impose, de par la nature même de l'énoncé, le passage obligé par un raisonnement ou une procédure démonstrative ; ainsi la recherche passe par la preuve du résultat.

Enoncés

1/ Un cercle étant donné sans son centre, retrouver ce centre

2/ Construire un triangle isocèle de base 7 cm et de hauteur relative à cette base 6 cm. Ce triangle est-il équilatéral ?

3/ Deux droites perpendiculaires (D_1) et (D_2) se coupent en 0 ; sur (D_1), de part et d'autre de 0, on porte 2 longueurs OB et OC ; sur (D_2) une longueur OA .

a) On donne OA = 5 ; OB = 4 ; OC = 6

b) On donne OA = 6 ; OB = 5 ; OC = 9

Dans les deux cas, le triangle AOB est-il rectangle ?

4/ On considère deux droites d'équations respectives :

$$9x + 5y + 10 = 0$$

$$5{,}7x + 3y - 18 = 0$$

5/ Tracer ces deux droites en repère orthonormé. Sont-elles parallèles ?

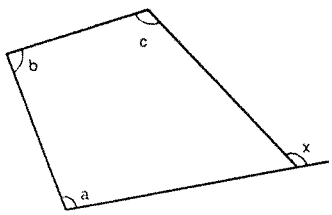
Sur la figure ci-contre, la valeur de x en degrés est :

a) 360 - a - b - c

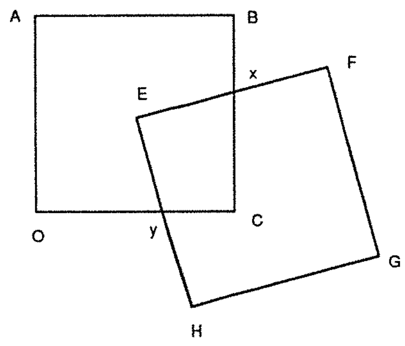
b) 180 + a + b + c

c) a + b + c

d) a + b + c - 180



ABCD et EFGH sont deux carrés de côté 12 cm.
E est le centre de ABCD ET Bx = 5 cm.
L'aire du quadrilatère EXCY est, en cm^2 :
30 - 35 - 36 - 40



6/ $a \in R^+$, classer les nombres a, $\sqrt{a}$, a^2

7 / a) Comparer les nombres $\sqrt{5+2\sqrt{6}}$ et $\sqrt{3}+\sqrt{2}$

b) Comparer les nombres

$$A = \frac{(0,9876543)^2 + 7,9876543}{2,9876543}$$

et $$B = \frac{(0,9876544)^2 + 7,9876544}{2,9876544}$$

8 / a) Parmi les rectangles de périmètre 10, y en-a-t-il un d'aire supérieure à tous les autres ? Y en-a-t-il un d'aire inférieure à tous les autres ?

b) Parmi les rectangles d'aire 25, y en-a-t-il un de périmètre inférieur à tous les autres ? Un de périmètre supérieur à tous les autres ?

Commentaires

EXERCICE 1

La recherche, et donc la construction du centre du cercle, ne peut aboutir que si on utilise les 2 propriétés suivantes :
- cercle unique passant par trois points ;
- propriété caractéristique de la médiatrice d'un segment.

Tous les problèmes de construction, où il est nécessaire d'analyser d'abord la situation sur la figure et de décrire ensuite la construction en la justifiant, pourraient entrer dans le cadre de cette rubrique.

EXERCICES 2 et 3

Ces deux exercices sont du même genre ; sur la figure, il semble que ces triangles possèdent la propriété envisagée. Qu'en est-il ? Les diverses réponses que l'on obtient des élèves sont de 3 niveaux :

1. L'affirmation s'en tenant aux apparences : "oui ce triangle est équilatéral" ou "oui celui-là est rectangle".

2. Les réponses de type probabiliste ; par exemple sous la forme : "il y a de fortes chances que..." ou bien "il est fort probable que ce triangle soit...". A ce stade, il est parfois intéressant de réaliser un sondage dans la classe : oui ou non le triangle est-il équilatéral

(ou rectangle) ? On s'interroge alors : l'avis majoritaire est-il gage de vérité ? Un événement très probable peut-il être faux ?

3. Les réponses prudentes : "comment juger de la réponse" ?

(Nous ne classerons pas les élèves qui s'abstiennent de répondre).

On peut ainsi mettre en lumière que l'apparence d'une vérité de type scientifique ne suffit pas à l'affirmer. Plus subtilement, est mis en jeu dans ce type d'activités la dialectique entre :

1/ une réalité tangible : un triangle physique aux caractéristiques données ;

2/ une représentation de cette réalité, à savoir un dessin, souvent confondu, c'est-à-dire identifiée avec l'objet réel ;

3/ le modèle mathématique construit pour en rendre compte et l'étudier et qui seul, permet d'aller au-delà du grossièrement visible.

Il faut essayer de faire appréhender ce type de subtilité et surtout de bien faire comprendre que la valeur de vérité d'un énoncé (le triangle isocèle...) n'a de sens que dans le modèle.

Pour les démonstrations simples, on utilise les relations métriques dans le triangle rectangle.

ex. 2 : triangle non équilatéral $(\frac{7}{2})^2 + 6^2 = 48,25 \neq 7^2$

ex. 3 : a) triangle non rectangle : $5^2 \neq 6 \times 4$
b) triangle rectangle : $6^2 = 9 \times 4$

EXERCICE 4

Les deux droites ont été choisies, là aussi, pour paraître parallèles sur la figure : coefficients directeurs peu différents.

EXERCICE 5 et 6

Questions à choix multiple ; ici, l'intuition, un raisonnement partiel ou des considérations de simple bon sens peuvent permettre de pressentir le résultat ou d'éliminer certaines réponses évidemment incorrectes.

Il n'en reste pas moins que la certitude du choix du résultat exact ne peut résulter que d'une démonstration : pour le 5) somme des angles d'un quadrilatère ; pour le 6) rotation de centre E , d'angle $\frac{\pi}{2}$ (ou calculs à l'aide du théorème de Pythagore).

EXERCICE 7

"L'évidence" que l'on obtient d'un grand nombre d'élèves est : $\sqrt{a} \leq a \leq a^2$.
On peut alors proposer plusieurs valeurs de a et faire des essais ; cet exercice pourrait donc être rattaché au paragraphe "heuristique".

Mais le classement nécessite ici aussi une démonstration (propriétés de la relation d'ordre dans $\mathbb{R}$) et même une discussion suivant les valeurs de a .

$$a \in \mathbb{R}^+ \ (a \leq 1 \Leftrightarrow a^2 \leq a \Leftrightarrow a \leq \sqrt{a})$$

ou $\quad a \in \mathbb{R}^+ \ (a^2 - a \leq 0 \Leftrightarrow a(a-1) \leq 0 \Leftrightarrow a \in [0,\ 1].$

Remarque :
Le type d'énoncé $\sqrt{a} \leq a \leq a^2$ qui apparaît au niveau 2^{nd}, 1ère voire terminale avec une fréquence troublante (80 % à 60 % selon le niveau) est ce que les didacticiens modernes appellent un théorème en acte. Le pédagogue ne peut pas ignorer cette réalité, et doit l'analyser et la comprendre s'il veut pouvoir aider les élèves à rectifier leurs fausses croyances.

Remarquons que l'inégalité produite est vraie pour $a \in \mathbb{N}$ et que l'élève transfert au champ des réels ce qu'il sait être vrai dans les entiers. Cela prouve que les réels, voire les rationnels ne sont pas intuitionnés et qu'il n'y a peut-être là rien d'étonnant si on considère la difficulté qu'ont éprouvée les plus grands esprits (des paradoxes de Zénon, aux démonstrations "dites fausses" de Cauchy) à appréhender et à construire ce type de nombres.

EXERCICE 8

Dans les deux cas, une idée a priori sur la comparaison des 2 nombres proposés semble très difficile ; de même d'ailleurs qu'une estimation assez précise. Bien sûr, dans les deux cas également, les calculatrices à 8 chiffres donnent le même résultat. Allons-nous en déduire que les 2 nombres sont égaux ?

En a) l'élévation au carré des 2 réels (positifs) permet de conclure à l'égalité.

En b) la comparaison s'avère plus complexe. Il faut d'abord formaliser la question, c'est-à-dire déterminer la fonction d'où sont issus les 2 calculs
(ici $f(x) = \dfrac{x^2 + x + 7}{x + 2}$ et les valeurs correspondantes de la variable x . Ensuite étudier le sens de variation de f.

x		-5		-2		1	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	||	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$		$\searrow$	||	$\searrow$		$\nearrow$

Les valeurs de x , dans notre exemple, appartiennent à un intervalle sur lequel f est décroissante : $x_2 > x_1 \Rightarrow B < A$.

Elles ont été choisies voisines de 1 car $f'(1) = 0$ et très voisines l'une de l'autre : ces 2 conditions afin d'obtenir 2 images très proches.

On peut remarquer que la machine (TI.57 par exemple) donne la réponse si on recherche les 3 chiffres décimaux non affichés (bon exercice en Term. A) car alors l'avant dernier chiffre décimal diffère dans A et B). Pour éviter cela, il serait peut-être préférable de choisir $x_1 = 0,9998765$ et $x_2 = 0,9998766$, plus proches de 1 .

EXERCICE 9

Là non plus, les élèves ne peuvent avoir une opinion a priori. Et comme dans le 8 b), la démarche est double :

1. Penser à "algèbriser" le problème : soit x une des 2 dimensions du rectangle etc...

2. Mettre en œuvre des techniques acquises : étude de fonction sur un intervalle.

On obtient :

cas a) aire $= f(x) = -x^2 + 5x$ $x \in [0, 5]$

x	0	$\frac{5}{2}$	5
$f(x)$	0 ↗	$\frac{25}{4}$	↘ 0

cas b) $\frac{1}{2}$ périmètre $= y(x) = \dfrac{x^2 + 25}{x}$ $x \in]0, +\infty[$

x	0	5	$+\infty$
y	$+\infty$ ↘	10	↗ $+\infty$

Conclusion

Dans tous ces exemples, la question posée est ouverte : c'est-à-dire que la réponse n'est pas formulée dans la demande (ou bien plusieurs réponses sont proposées). Il est indispensable, pour les résoudre d'exhiber une démonstration : raisonnement, calculs ou applications de techniques algébriques. La solution n'est donc accessible qu'après la rédaction effective de la recherche. En ce sens, ces exercices constituent un bon entraînement pour faire prendre conscience aux élèves de la nécessité de toujours justifier une affirmation.

Nous les avons classé en deux catégories :

Première catégorie (exercices 2, 3, 4, 7, 8b) : ceux dans lesquels il y a contradiction entre la réponse qui semble évidente (sur le dessin, à la machine ou intuitivement) et la vérité. Ce type d'exercices nous paraît important pour convaincre les élèves de ne pas se "fier aux apparences".

Deuxième catégorie (exercices 1, 5, 5, 8a), 9) est constituée des questions pour lesquelles il est difficile (voire impossible) d'avoir une idée a priori sur la réponse. Dans ce cas, quelques essais ou l'intuition peuvent parfois aider à éliminer certaines réponses, "à trouver la voie" de la démonstration déductive qu'il faudra absolument développer ensuite pour obtenir le résultat.

Pour terminer, disons que ces exercices ont été choisis aussi simples que possible afin qu'un élève de TA2 n'éprouve pas (ou peu) de difficultés de compréhension théorique.

CHAPITRE IV

REPERAGE DE MODES DE DEMONSTRATION ou Inventaire aux travers de problèmes simples des méthodes de démonstration utilisées dans les cursus de l'enseignement secondaire

Les quelques questions suivantes peuvent-être résolues par des types de raisonnement mathématiques très différents.

Dans ce chapitre, la procédure sera la suivante :

1/ On cherche à résoudre le problème posé.

2/ Une solution trouvée, on cherchera à faire l'analyse du mode de raisonnement utilisé.

3/ Lorsque l'ensemble des exercices aura été abordé, on procédera à l'inventaire des types de raisonnement rencontrés.

1. On lit "si $x > 0$ alors $x^4 \geq x$"
Cet énoncé est-il vrai ?

2. On lit "si $x \geq 2$ alors $x^3 \geq x^2$"
Cet énoncé est-il vrai ?

3. On lit a) "si $x^3 < 8$ alors $x > \frac{3}{2}$"

b) "si $x > \frac{3}{2}$ alors $x^3 > 8$"

Ces énoncés sont-ils vrais ?

4. On calcule la somme des entiers impairs successifs

$S_1 = 1$
$S_2 = 1 + 3 = 4$
$S_3 = 1 + 3 + 5 = 9$
$S_4 = 1 + 3 + 5 + 7 = 16$
S_5 S_6 .... autant de termes que nécessaires.

Peut-on calculer, c'est-à-dire prévoir le résultat de S_{100} ?
Donner une formule pour S_n , c'est-à-dire pour la somme des n premiers nombres impairs (on écrira le $n^{\text{ième}}$ nombre impair).
L'expression que vous avez trouvée pour S_n est-elle selon vous prouvée ? Communiquer votre preuve !

5. On a besoin au cours d'un calcul de l'expression de

$\sigma_n = 1^2 + 2^2 + ... + n^2$

Quelqu'un communique le résultat

$\sigma_n = 1^2 + 2^2 + ... + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

Le problème se pose alors de contrôler ce résultat. Autrement dit est-il vrai pour tout $n \in N^*$ ou non ?

6. Trouver les entiers n tel que 3 divise $n^3 - n$

7. On sait que $s_n = 1 + 2 + 3 + ... + n = \frac{(n+1)n}{2}$

On pose $\sigma_n = 1^3 + 2^3 + 3^3 + ... + n^3$

Dresser le tableau

n	1	2	3	4	5	6	...
s_n							
σ_n							

Problème : à partir du rapprochement opéré dans le tableau précédent, trouver une formule permettant le calcul de σ_n dès que n est fixé. En fonction de ce que vous aurez trouvé, vous essaierez de situer le niveau de votre démarche.
Est-ce une conjecture ? Une vérité prouvée ?...
en détaillant vos affirmations.

8. On s'intéresse aux nombres u_n définis par $u_0 = 3$ et $u_{n+1} = \frac{1}{3} u_n + 4$

Dresser le tableau

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
u_n	3											
	12	13	14	15	16	17	18	19	20	....		

a) Peut-on classer tous les nombres u_n ? (c'est-à-dire deux nombres u_n successifs, expliquer cette équivalence).

b) Les calculatrices laissent supposer (voir tableau précédent) que tous les nombres u_n sont égaux à 6 à partir d'un certain rang. En est-il ainsi ? Comment se classent les nombres u_n par rapport à 6 ? Comment expliquer le résultat affiché par les calculatrices ?

Note : avant de remplir le tableau on réfléchira à la stratégie à suivre de façon à utiliser la calculatrice avec le maximum d'efficacité.

9. Soient les énoncés "si $x > 4$ alors $x^2 > 9$" (1)
"si $x^2 \leq 9$ alors $x \leq 4$" (2)

a) Ces énoncés sont-ils vrais ou faux ?
b) Ces énoncés ont-ils la même signification ? (Que signifie : ont-ils la même signification ? Comment en juger ?)
c) Peut-on décrire de façon abstraite et donc applicable à d'autres énoncés la relation entre (1) et (2).
d) On considère l'énoncé (1) "si 7 ne divise pas n alors 7 ne divise pas n^2.
Quel est l'énoncé (2) qui s'articule à (1) comme dans l'exemple précédent (1) est-il vrai ?

Vocabulaire
Des énoncés comme (1) et (2) sont dits contraposés.

10. a) Soient a et b deux nombres entiers naturels.
Est-ce que si (1) $a \neq b$ alors $a^2 + a \neq b^2 + b$
(2) $a \neq b$ alors $a^3 + a \neq b^3 + b$

b) Est-ce que si $n^2 + n + 1 \notin N$ alors $n \notin N$

11. Prérequis : parallélisme (strict)

A_1 - Par un point A , on peut mener une droite D et une seule parallèle à une droite donnée Δ.
A_2 - Par un point A , on peut mener une droite et une seule D orthogonale ou perpendiculaire à une droite donnée Δ .

a) Vous avez souvent utilisé dans les petites classes la proposition suivante :
"*Si deux droites D et D' sont parallèles alors toute droite Δ qui coupe l'une coupe l'autre*".
Cette proposition est-elle une évidence ? Pour vous ? Pour tout le monde ? (autrement qu'est-ce qu'une évidence ?)
Si vous aviez à faire découvrir cette propriété à quelqu'un qui débute en géométrie, que diriez-vous ? Comment lui feriez-vous comprendre la nécessité de ce résultat ? A quel(s) niveau(x) situeriez-vous votre argumentation ?
- au niveau du dessin ?
- au niveau de l'évidence ?
- au niveau de la preuve ?...
Expliquer en quoi le niveau choisi vous paraît-il suffisant ?

b) Même type de questionnement à propos de l'énoncé
"Si deux droites distinctes D et D' sont perpendiculaires à une même droite Δ alors ces deux droites sont parallèles".

c) *"Si D et D' sont deux droites parallèles et si Δ est perpendiculaire à D alors Δ est perpendiculaire à D' .*

Reprendre les argumentations données en a) b) c). Se situent-elles au même niveau ? Expliquer les différences éventuelles de vos niveaux d'argumentation.

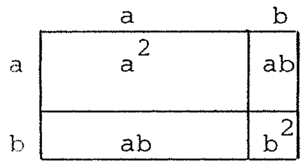
12. a) C étant un entier inférieur à 50, peut-on trouver des entiers a et b tels que $C^2 = a^2 + b^2$? Si oui, trouver les tous.

b) Peut-on construire des triangles rectangles dont les côtés ont des mesures qui sont des nombres entiers et tels que :
- l'hypoténuse soit égale à 100 ;
- un côté de l'angle droit soit égal à 100 .

13. On trouve dans un ouvrage ancien la figure suivante :

L'aire du carré de côté $a + b$ qui est $(a + b)^2$ peut se décomposer comme cela est indiqué sur la figure suivante.

Il en résulte que : $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$



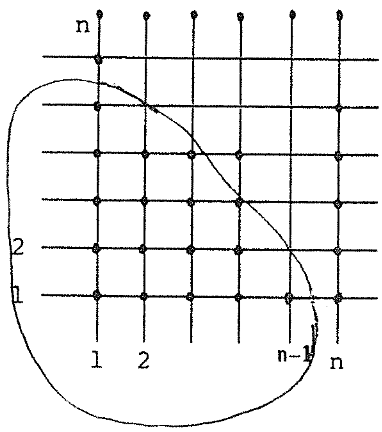
S'agit-il selon vous d'une démonstration de l'identité bien connue ? Argumenter votre point de vue.

14. On représente les n^2 points à coordonnées entières du carré de côté n .

Le nombre de points dans le triangle dessiné est :
$1 + 2 + 3 + \dots + (n-1)$

à l'extérieur du triangle il y a
$1 + 2 + 3 + \dots + (n-1) + n$ points

d'où
$2\,(1 + 2 + \dots + (n-1) + n) = n^2 + n$
et $1 + 2 + \dots + (n-1) + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$ (1)



Le procédé précédent fournit-il selon vous une démonstration de la formule (1) ?
Argumenter votre point de vue.

Notes

1/ est destiné à faire utiliser, voire découvrir la méthode du contre exemple. L'heuristique joue un rôle important dans ce type d'exercice, puisqu'il s'agit de tester l'énoncé pour savoir s'il est vrai ou faux, la méthode du contre exemple trouve alors son champ naturel d'application et d'émergence.

Point de vue personnel : ce type de démarche est sous employé dans l'enseignement traditionnel, puisque les exercices posés sous la forme, montrer que, établir que, vérifier que, excluent tout contrôle a postériori du résultat obtenu, celui-ci étant nécessairement juste puisque donné comme vrai a priori. Il y a là une faute didactique grave, une des caractéristiques de la pensée mathématique étant d'être régulée par des procédures de contrôle, l'enseignement de cette discipline devrait par conséquent habituer l'élève à formuler des conjectures, à établir des résultats et à tester ceux-ci systématiquement, ce qui est assez facile dans le domaine numérique, si cela était fait correctement, la nécessité de démontrer apparaîtrait mieux à beaucoup d'élèves, ainsi que le rôle de l'esprit critique, si fondamental, dans le processus de validation ou d'infirmation d'un résultat ou d'une preuve. D'autre part, le fait de développer l'usage de l'esprit critique d'un sujet sur ses propres productions est hautement éducatif.

2/ L'exploration de la situation de l'énoncé 2) fait sentir rapidement que celui-ci est vrai. La nécessité d'une preuve peut facilement s'articuler à 1) car qui dit qu'on ne peut pas trouver un contre exemple. Comment balayer ce doute ?

3/ Idem.

4/ L'exercice comprend plusieurs niveaux :

1/ Trouver par induction que $S_n = n^2$. (Résultat extraordinaire pour qui sait s'émerveiller!).

2/ Justifier que le résultat est vrai pour toute valeur que l'on peut donner à n .

Cet exercice est l'occasion d'introduire la méthode de récurrence.
Pascal : "quoique cette proposition ait une infinité de cas, j'en donnerai une démonstration bien courte en supposant 2 lemmes.
Le premier qui est évident de soi-même, que cette proposition se rencontre dans la seconde base (ici est vrai pour $n = 1, 2, 3, 4$)
Le deuxième que si cette proposition se trouve dans une base quelconque (vraie pour n), elle se trouve nécessairement dans la base suivante (vrai pour $n + 1$).
D'où il se voit qu'elle est nécessairement dans toutes les bases (vraie pour tout n), car elle est dans la seconde d'après le premier lemme ; donc par la seconde, elle est dans la troisième base, donc dans la quatrième à l'infini. Il faut donc seulement démontrer le second lemme en cette sorte. (Cf. également texte de Poincaré sur le raisonnement par récurrence dans les appendices).

5/ 6/ 7/ sont des occasions diverses de faire fonctionner la méthode de démonstration par récurrence.

Note : ces exercices sont à donner ensemble. Des compléments sur la méthode de raisonnement par récurrence ne doivent intervenir (à mon avis) qu'après avoir fait éprouver la nécessité d'une démonstration (référence à 1)c), c'est-à-dire à la possibilité d'un contre exemple, tant que celle-ci n'a pas été écartée par la production d' une preuve).

8/ Toute les machines affichent $u_n = 6$ à partir de u_{21}
a) les calculs semblent indiquer que :
$u_0 < u_1$, $< \dots < u_{18} \dots u_{20} = u_{21} = u_{22} \dots = u_n = 6$
Problème : que cachent ces apparences ?
Peut-on avoir $u_n = 6$ pour $n \geq 20$?

Si $u_n = 6$ alors $u_n = \frac{1}{3} u_{n-1} + 4 = 6$ équivaut à $u_{n-1} = 6$
d'où $u_n = u_{n-1} = u_{n-2} = \dots = u_0 = 6$ ce qui contredit l'hypothèse $u_0 = 3$

On rencontre à l'occasion de ce très court raisonnement un raisonnement du type :
A-t-on A ?
Si A alors B mais on a non B donc on n'a pas A autrement dit on a non A - appelé raisonnement par l'absurde.

Par conséquent $u_{n-1} \neq u_n$ pour tout $n \in N$.
Si $u_{n-1} < u_n$, vrai jusqu'au rang 5 assurément, alors $\frac{1}{3} u_{n-1} < \frac{1}{3} u_n$.
Et donc $\frac{1}{3} u_{n-1} + 4 < \frac{1}{3} u_n + 4$ ie : $u_n < u_{n+1}$ ce qui prouve que...

On n'a pas $u_n = 6$ pour un certain n_1 d'après ce qui précède et $u_n < 6$ pour $n = 1, 2, 3, 4, 5$.

$\frac{1}{3} u_n < 2$ $\frac{1}{3} u_n + 4 < 6$ ie : $u_{n+1} < 6$ ce qui prouve que...

Les calculatrices affichent 6 dès que $6 - u_n < 10^{-a}$, a dépend de la précision de la calculatrice. (pour une calculatrice ordinaire $a = 8$). On peut donc affirmer que :

dès que $n > 20$
$0 < 6 - u_n < 10^{-8}$

Il paraît intéressant de mettre en évidence ce point ; la machine affiche $6 = u_n$ si $n > 20$ et $u_n \neq 6$ pour tout $n \in N$!

9/ L'objet de l'activité est de faire constater que $P \Rightarrow q$ et $\neg q \Rightarrow \neg p$ sont équivalents, de façon non formelle, autrement dit en travaillant uniquement sur le sens.
Cela étant fait, l'expérience doit prouver que l'une des deux formes équivalentes est souvent plus commode que l'autre à utiliser pour démontrer la propriété qu'elles expriment.

La démonstration de l'équivalence de (1) et (2) se fait comme suit :
(1) $\Rightarrow$ (2)
si $x^2 \leq 9$ alors $x \leq 4$
en effet de deux choses l'une,
ou bien (A) $x > 4$
ou bien (B) $x \leq 4$
mais si on a (A) alors $x^2 > 9$ d'après (1) ce qui contredit la prémisse de (2) etc...

Il y a quelques difficultés pour qui n'est pas rompu à l'usage de l'implication, car il s'agit de montrer qu'une implication implique une autre implication
$(P \Rightarrow q) \Rightarrow (r \Rightarrow s)$.

De plus, il y a utilisation de la règle de détachement qu'il convient peut-être d'expliciter, de manière non formelle.

[Si $(x > 4$ et (si $x > 4$ alors $x^2 > 9))$ alors $x^2 > 9$]
et de la preuve habituelle qu'une implication est vraie.

[Si $x^2 \leq 9$ alors $x \leq 4$] est vraie si $x^2 \leq 9$
étant supposée vraie, on parvient à établir que $x \leq 4$ est vraie.

De façon formelle :

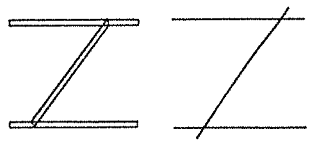
a/ Si p et $(p \Rightarrow q)$ alors q règle de détachement.

b/ Pour montrer que $p \Rightarrow q$ est vrai, on montre que si p est vrai, q est vrai.

10/ Propose une illustration des considérations précédentes. Il est en effet plus aisé de travailler avec $=$ qu'avec $\neq$ et avec $\in$ qu'avec $\notin$

11/ 1. Propose une réflexion sur la notion d'évidence et donc sur le niveau de l'argumentation justifiant l'assertion.

Il conviendra de distinguer les :
- cela me semble évident (subjectif)
- cela est évident (proclamé objectif universel).



Il conviendra de faire ressortir que ces propriétés sont démontrables, autrement dit qu'elles sont conséquences des définitions (objets du discours) des mots parallèles, perpendiculaires... et des propriétés de définitions, axiomes, posés a priori sur ces objets.

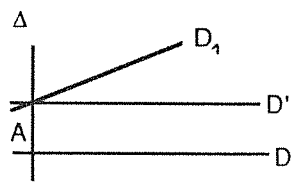
Les constats faits sur les représentations ne sont là que pour permettre de constater qu'il y a adéquation entre la réalité physique décrite par la géométrie euclidienne, le système de représentation et le modèle mathématique qui en rend compte, modèle qui est d'ordre discursif.

2. Permet de mettre en œuvre des raisonnements par l'absurde très simples.

a) Soit $A = D \cap \Delta$
si $D' \cap \Delta = \varnothing$ alors D' et Δ sont parallèles. Par A on pourrait alors mener 2 parallèles à D' ce qui contredit l'axiome A, donc $D' \cap \Delta \neq \varnothing$ ...

b) Si $D \cap D' = \{A\}$ alors par A on pourrait mener 2 perpendiculaires à Δ ce qui contredit A_2 donc $D \cap D' = \varnothing$.

c) Soit $\{A\} = D' \cap \Delta$



Par A on peut mener $D_1 \perp \Delta$. Dans ces conditions $D_1 // D$ et donc d'après A_1, $D_1 = D'$ d'où le résultat.

12/ a) Cet exercice illustre la méthode par inventaire des cas. L'inventaire exhaustif étant possible vu que $a < 50$ et $b < 50$.

c........

c^2....... c^2 étant donné on calcule $c^2 - a^2$ $a = 1, 2, ... (c-1)$ et on retient les valeurs qui sont des carrés.

Ex.	$c = 4$	$c^2 = 16 = 1 + 15$	$c = 5$	$c^2 = 25 = 1 + 24$
		$c^2 = 16 = 4 + 12$		$c^2 = 25 = 4 + 20$
		$c^2 = 16 = 9 + 8$		$c^2 = 25 = 9 + 16$

b) Propose un réinvestissement de la méthode précédente.

13/ A pour objet de faire réfléchir sur ce qu'est une démonstration et de soulever la question de savoir si une démonstration rigoureuse, passe nécessairement par le formalisme. Cette réflexion pourra être utilement nourrie par la lecture de textes anciens accessibles (Euclide par exemple) et par quelques données historiques
- naissance du symbolisme algébrique à la fin du XVIe, (Viète) ;
- naissance du mode de penser symbolique dans la première moitié du XVIIe (Descartes) ;
- "les grandeurs" des anciens étaient géométriques.

14/ Propose une réflexion du même ordre que 13). On pourra faire remarquer à cette occasion que la représentation des grands entiers fut impossible dans les systèmes d'écriture égyptien, grec, romain (on ne pouvait aller qu'à l'ordre de 10.000) et que la représentation d'entiers arbitraires fut problématique jusqu'à l'introduction du symbolisme algébrique, d'où les artifices du type précédent.

APPENDICES.

* Texte de Pascal, fondateur du mode de raisonnement par récurrence.
* Texte de Poincaré.

Le principe de récurrence dans le traité du triangle arithmétique de Pascal. Texte fondateur.

"Quoique cette proposition ait une infinité de cas, j'en donnerai une démonstration bien courte, en supposant 2 lemmes.

Le 1. qui est évident de soi-même, que cette proposition se rencontre dans la seconde base...

Le 2. que si cette proposition se trouve dans une base quelconque, elle se trouvera nécessairement dans la base suivante.
D'où il se voit qu'elle est nécessairement dans toutes les bases : car elle est dans la seconde base par le premier lemme : car elle dans la seconde base par le premier lemme ; donc par le second elle est dans la troisième base, donc dans la quatrième, et à l'infini.
Il faut donc seulement démontrer le second lemme, en cette sorte."
[PASCAL : Traité du triangle arithmétique]

Poincaré : le raisonnement par récurrence.
La science et l'hypothèse, 1902. Flammarion, chapitre I, § V.

"Le caractère essentiel du raisonnement par récurrence c'est qu'il contient, condensés pour ainsi dire une formule unique, une infinité de syllogismes.
Pour qu'on s'en puisse mieux rendre compte, je vais énoncer les uns après les autres ces syllogismes qui sont, si l'on veut me passer l'expression, disposés en cascade.
Ce sont bien entendu des syllogismes hypothétiques.
Le théorème est vrai du nombre 1.
Or s'il est vrai de 1, il est vrai de 2.
Donc il est vrai de 2.
Or s'il est vrai de 2, il est vrai de 3.
Donc il est vrai de 3, et ainsi de suite.
On voit que la conclusion de chaque syllogisme sert de mineure au suivant.
De plus les majeures de tous nos syllogismes peuvent être ramenées à une formule unique.
Si le théorème est vrai de $n - 1$, il l'est de n.
On voit donc que, dans les raisonnements par récurrence, on se borne à énoncer la mineure du premier syllogisme, et la formule générale qui contient comme cas particuliers toutes les majeures.
Cette suite de syllogismes qui ne finirait jamais, se trouve ainsi réduite à une phrase de quelques lignes.
Il est facile maintenant de comprendre pourquoi toute conséquence particulière d'un théorème peut, comme je l'ai expliqué plus haut, être vérifiée par des procédés purement analytiques.
Si au lieu de montrer que notre théorème est vrai de tous les nombres, nous voulons seulement faire voir qu'il est vrai du nombre 6 par exemple, il nous suffira d'établir les 5 premiers syllogismes de notre cascade ; il nous en faudrait 9 si nous voulions démontrer le théorème pour le nombre 10 ; il nous en faudrait davantage encore pour un

nombre plus grand ; mais quelque grand que soit ce nombre nous finirions toujours par l'atteindre, et la vérification analytique serait possible.
Et cependant, quelque loin que nous allions ainsi, nous ne nous élèverions jamais jusqu'au théorème général, applicable à tous les nombres, qui seul peut être objet de science. Pour y arriver, il faudrait une infinité de syllogismes, il faudrait franchir un abîme que la patience de l'analyse, réduit aux seules ressources de la logique formelle, ne parviendra jamais à combler.
Je demandais au début pourquoi on se saurait concevoir un esprit assez puissant pour apercevoir d'un seul coup d'œil l'ensemble des vérités mathématiques.
La réponse est aisée maintenant ; un joueur d'échecs peut combiner quatre coups, cinq coups d'avance, mais, si extraordinaire qu'on le suppose, iln'en préparera jamais qu'un nombre fini ; s'il applique ses facultés à l'arithmétique, il ne pourra en apercevoir les vérités générales d'une seule intuition directe ; pour parvenir au plus petit théorème, il ne pourra s'affranchir de l'aide du raisonnement par récurrence parce que c'est un instrument qui permet de passer du fini à l'infini.
Cet instrument est toujours utile, puisque, nous faisant franchir d'un bond autant d'étapes que nous le voulons, il nous dispense de vérifications longues, fastidieuses et monotones qui deviendraient rapidement impraticables. Mais il devient indispensable dès qu'on vise au théorème général, dont la vérification analytique nous rapprocherait sans cesse, sans nous permettre de l'atteindre.
Dans ce domaine de l'artihmétique, on peut se croire bien loin de l'analyse infinitésimale, et, cependant, nous venons de le voir, l'idée de l'infini mathématique joue déjà un rôle prépondérant, et sans elle il n'y aurait pas de science parce qu'il n'y aurait rien de général."

CHAPITRE V

UN TEXTE D'EUCLIDE EN CLASSE ou à propos de l'utilisation de textes historiques dans les classes, suivi de notes sur le projet euclidien

1. Introduction

Cette notice rend compte de l'essai fait dans une classe de Terminale A1 d'introduire un texte ancien dans une séquence d'enseignement et surtout des questions que posent ce type d'activité.

Le texte choisi - assez arbitrairement - fut celui de l'"algorithme d'Euclide" (Prop.VII.I) en raison de sa notoriété y compris chez les élèves et de sa relative simplicité au niveau mathématique.

Dans une première étape on a remis aux élèves, sans commentaire, la photocopie du texte (définitions du livre VII et proposition 7.1) et on leur a demandé de donner par écrit leurs réactions sur la partie "Définitions". A l'évidence les définitions données par Euclide ne sont pas accessibles à un élève sans une bonne préparation. Il y a de fréquents contresens et souvent un avœu d'incompréhension. En effet la compréhension des définitions ne peut se faire que dans le contexte de leur histoire et avec la connaissance des procédés de calculs utilisés à cette époque. Une première lecture hâtive mène à de nombreux anachronismes et à une critique injustifiée de certaines définitions dont on ne saisi l'utilité que dans l'économie générale de la démarche euclidienne.

Il est donc nécessaire de bien préparer la classe à cette lecture.

Dans une seconde étape on a ensuite demandé le même travail pour ce qui est de la proposition *7.1.*

Les résultats ont été pour le moins mitigés mais il y a eu moins d'incompréhension. Beaucoup ont reconnu plus ou moins le classique "algorithme d'Euclide" et l'on traduit dans notre langage avec ce que cela comporte comme à peu près et erreurs d'interprétation. Peu d'élèves ont été capables en suivant à la lettre la démarche euclidienne d'établir que deux nombres donnés sont copremiers ou non... et dans le cas ou "à la main" l'algorithme "marchait" certains élèves ont manifesté une certaine surprise ; la partie "réciproque" d'une démonstration "par l'absurde" n'a pas en général convaincu.

On se propose donc ici de préparer à la lecture des définitions du livre VII en cadrant historiquement cet ensemble du Corpus Euclidien.

2. Cadre historique

Extrait de "Nombre, mesure & continu" par Jean Dhombres chez CEDIC :

"Vers 300 avant Jésus Christ, un corps de doctrines mathématiques est constitué et se trouve magistralement exposé dans les Eléments d'Euclide. Ce dernier a vécu à Alexandrie,

dans le milieu hellenistique, à la jonction du 4ème et du 3ème siècle.(...). Une première constatation est celle de la différence totale de nature entre le corpus composé par Euclide et ce que l'on connaît des mathématiques égyptiennes ou babyloniennes.(...). Chez Euclide [on trouve des] définitions convenablement organisées selon un ordre logique à partir de définitions élémentaires, d'axiomes et de postulats et des résultats ordonnés déductivement... sous forme de théorèmes et de propositions".

C'est bien là que réside l'originalité du discours euclidien et qui en fait marque la naissance de la mathématique telle que nous l'entendons. Avant Euclide il y avait des pratiques mathématiques techniquement très avancées ainsi qu'un vaste ensemble de connaissances, mais celles-ci ne s'articuleraient pas entre elles à l'intérieur d'un système hypothético-déductif et ne faisaient donc pas l'objet de démonstrations au sens que ce terme a pris après les éléments d'Euclide - bien que l'on puisse rencontrer localement des propositions obtenues par déduction.

Chez les babyloniens (vers 1792/175O avant Jésus Christ) on dominait assez bien les problèmes liés à la résolution d'équations quadratiques ainsi que des calculs de géométrie "dans l'espace" qui demandaient une virtuosité certaine. Des bribes de trigonométrie sont également décelables. Les calculs se faisaient en base 60 et toute les propriétés numériques de cette base étaient bien connues. Les babyloniens sont déjà en possession d'une numération de position qui permet d'exprimer des valeurs inférieures à l'unité sous forme de $p/60 + q/60^2 + ...$ quoique la notation ne permette pas de connaître l'unité ; une valeur n'est écrite qu'à un facteur 60n près. La base 60 a été évidemment choisie pour son nombre élevé de diviseurs ce qui fait que beaucoup de quotients s'écrivent exactement dans cette base. Pour les quotients ne "tombant pas juste" les babyloniens se contentaient d'approximations numériques à 60-n près ; il n'y a aucune différence de nature dans leur esprit entre une approximation de 3/11 et de la racine de 2 par exemple la périodicité de la partie sexagésimale n'apparaissant pas.

La mathématique egyptienne de la même époque semble un peu en retrait. Néanmoins les équations du 2ème degré étaient résolues dans leur généralité (cf. Le papyrus Rhindt qui date de 1850/1800). Mais le système de numération égyptien est moins bien adapté aux progrès de la "logistique" ou science des calculs que ne l'est le babylonien. La numération est purement additive avec des abréviations de base décimale et les rapports ne s'écrivent que sous forme de quantièmes ($1/n$ ou $n \in N$ sauf $2/3$).

Les textes babyloniens et égyptiens dont nous disposons montrent qu'il n'y a pas démarche démonstrative. Les résultats sont donnés comme des "recettes" - ou modèles algorithmiques - qu'il suffit d'imiter ; nul besoin de justifier les calculs : le résultat et la procédure sont justifiés après une vérification in fine. Les exemples sont particulièrement bien choisis pour que le résultat numérique soit unique (dans le cas d'un 2ème degré - ou un nombre négatif n'a aucun sens -) et s'exprime exactement dans le système de numération choisi au point que la méthode indiquée peut parfois ne pas s'appliquer à d'autres exemples.

Les anciens grecs tels Thalès (636-546) ne systémisent pas encore la démarche démonstrative : il y a néanmoins dans leurs démarches quelques îlots déductifs.

Le "Corpus Euclidien" est une coupure radicale avec les présentations antérieures du savoir mathématique. Celui-ci ne présente probablement pas ou peu de découvertes récentes pour l'époque ; il s'agit essentiellement d'une nouvelle présentation de propositions (qui n'étaient pas nécessairement bien établies) dont certaines sont très anciennes dans un discours - un logos - qui se veut "raisonnable". On notera à ce propos que certains résultats connus sont absents faute de pouvoir satisfaire à cette exigence démonstrative et logique du Corpus. Très shématiquement on pourrait dire que le discours euclidien c'est le discours mathématique qui s'instaure après Platon (428-348), incluant les résultats de Théétète (410-369) et d'Eudoxe (408-355) (qui est l'inspirateur de la théorie des proportions du Livre V).

Au risque de commettre un sérieux anachronisme, on pourrait dire que Euclide a réalisé en son temps un travail analogue à celui qu'a fait à une époque récente le groupe Bourbaki : une reconstruction a-temporelle de l'édifice mathématique.

(On se reportera au plan des Eléments d'Euclide en annexe trois).

3. Définitions

Dans la présentation euclidienne rien n'est laissé au hasard, a fortiori rien n'est gratuit. L'étude des définitions nous renseigne donc particulièrement bien sur la pratique mathématique des contemporains d'Euclide. Nous allons prendre les définitions une par une pour commencer (On a pris la traduction classique de Peyrard) :

Df 7.1 *L'unité est ce selon quoi chacune des choses existantes est dite une*

Il ne s'agit pas là d'un simple exorcisme et d'une définition tautologique : tout doit être défini alors il faut bien définir l'UN, la "monade" par définition sans parties. De plus l'arithmétique considérait par essence des nombres entiers et afin de manipuler des quantièmes il fallait une "super-unité" qui devenait sécable. C'est la problématique de la relation collectivisante : UN troupeau est une "unité" ; on peut concevoir, si le nombre des têtes est pair d'en prendre la moitié. Cette notion un peu élastique d'unité peut venir de la notation Babylonienne ou l'écriture d'un nombre ne permettait pas de connaître son rang (c'est -à-dire qu'il était défini à un facteur 60n près). On retrouve dans le calcul egyptien des quantièmes la même approche : on ne divise pas l'unité si besoin est on en change.

Df 7.2 *Un nombre est un assemblage composé d'unités.*

Cette définition ne pose aucun problème. Ce peut être l'occasion de rappeler ce qu'est un NOMBRE, mesure de la multiplicité : seul le "nombre entier" est un nombre. L'unité "1" est un cas particulier et n'est pas considérée comme un nombre. On notera en particulier qu'il n'y a pas de "nombres rationnels" et encore moins de nombres irrationnels. Ces derniers sont des rapports.

Df 7.3 *Un nombre est partie d'un nombre, le plus petit du plus grand, lorsque le plus petit mesure le plus grand.*

On reconnaît là la notion de "diviseurs". Un nombre n'est pas partie de lui-même, l'unité n'étant pas nombre.

Df 7.4 *Un nombre est parties d'un nombre, quand il ne le mesure pas.*

Cette définition est difficilement compréhensible ainsi isolée ; elle ne prend à nos yeux de sens que lorsque l'on s'en sert plus avant dans le texte pour établir les propositions ultérieures en particulier la 4ème.

Prop. 7.4 *"Tout nombre est partie ou plusieurs parties de tout autre nombre du plus petit au plus grand".*

L'argument est schématiquement le suivant :
Si a et b sont premiers entre eux alors a est plusieurs parties de b (en fait a est a fois la partie unitaire de b).
Sinon comme a ne divise pas b , il a avec b un commun diviseur Δ qui est une partie de b et a est plusieurs parties (Δ) de b .

Df 7.5 *Un nombre est multiple d'un nombre le plus grand du plus petit, quand il est mesuré par le plus petit.*

Df 7.6 *Le nombre pair est celui qui peut se partager en deux parties égales.*

Df 7.7 *Le nombre impair est celui qui ne peut pas se partager en deux parties égales, ou bien celui qui diffère d'une unité d'un nombre pair.*

Ces deux définitions sont très simples encore que la 7.7 est double ; il faudrait en établir l'équivalence.

Df 7.8 *Le nombre pairement pair est celui qui est mesuré par un nombre pair multiplié par un nombre pair.*

La définition n'est pas claire, l'étude de théorèmes ultérieurs où cette définition est utilisée montre que ce sont les nombres de la forme $2^n p$ ou $n > 1$. On peut y voir par manque de "symbolisme algébrique" une définition récursive.

Df 7.9 *Le nombre pairement impair est celui qui est mesuré par un nombre pair multiplié par un nombre impair.*

Ce sont en fait les nombres de la forme : $2 \mathrm{x} m$ où m est impair.

Df 7.10 *Le nombre impairement pair est celui qui est mesuré par un nombre impair multiplié par un nombre pair.*

Ce sont les nombres : $m \times 2^n$ où m est impair et $n > 1$

Df 7.11 *Le nombre impairement impair est celui qui est mesuré par un nombre impair multiplié par un nombre impair.*

Ce sont les nombres impairs non premiers.
Ces quatre dernières définitions montrent l'importance de la notion de parité dans la mathématique grecque. A priori on voit mal l'utilité de ces définitions (qui sorties de leur contexte nous sont incompréhensibles : quelle différence entre Df 8 et Df 9 ?). La mathématique comme la logistique a pour objet selon Platon (Gorgias 451 B.) *"l'étude du pair et de l'impair"*. Du point de vue théorique c'est probablement la première abstraction et les grecs étudiaient l'arithmétique modulo 2. De fait l'importance de ces notions est

essentiellement opératoire et ce dans deux directions. D'abord c'est en étudiant les restes modulo 2 que Théétète (147D) a pu démontrer l'irrationalité de la racine de deux puis de toutes les racines d'entiers non carrés jusqu'à 15. Une autre méthode s'est révélée nécessaire pour la racine de 17. En second lieu, et même si le discours euclidien tend à le passer sous silence, c'est pratiquement en base deux que se faisaient les opérations (la logistique) : les grecs ont repris le procédé de la multiplication égyptienne ainsi que les dimidiations ou divisions par deux (voir annexe 1).

Df 7.12 *Le nombre premier est celui qui est mesuré par l'unité seule*

On notera qu'un nombre premier ne se mesure pas : un n'est pas un nombre.

Df 7.13 *Les nombres premiers entre eux sont ceux qui ont l'unité seule pour commune mesure.*

La proposition *7.1* établit précisément l'algorithme permettant de savoir si des nombres sont ou non copremiers.

Df 7.14 *Le nombre composé est celui qui est mesuré par quelques nombre.*

Df 7.15 *Les nombres composés entre eux sont ceux qui ont quelques nombres pour commune mesure.*

Df 7.16 *Un nombre est dit multiplier un nombre, lorsque le multiplié est ajouté autant de fois qu'il y a d'unités dans celui qui le multiplie, et qu'un nombre est produit.*

On notera ici que la multiplication est définie alors que l'addition est prise comme une propriété première... cela tient sans doute à la notation additive égyptienne qui rendait inutile une définition de l'addition : celle ci se faisait directement sur l'écriture.

Il serait utile de se poser la question de la restriction in fine : "et qu'un nombre est produit" ; on voit mal comment ça pourrait ne pas être le cas.

Df 7.17 *Lorsque deux nombres se multipliant font un nombre, celui qui est produit se nomme plan ; et les nombres qui se multiplient se nomment les côtés du produit.*

Df 7.18 *Lorsque trois nombres se multipliant entr'eux font un nombre, celui qui est produit est appelé solide ; et les nombres qui se multiplient, se nomment les côtés de ce produit.*

Même remarque quant à la restriction que pour *Df 7.16* . On remarquera ce besoin d'un support géométrique pour des nombres, ce qui, notons le, empêche une interprétation au produit de plus de trois nombres.

Df 7.19 *Le nombre quarré est celui qui est également égal, ou celui qui est contenu sous deux nombres égaux.*

Df 7.20 *Le nombre cube est celui qui est également égal également, ou celui qui est contenu sous trois nombres égaux.*

Df 7.21 *Des nombres sont proportionnels, lorsque le premier est le même multiple du second ,que le troisième l'est du quatrième, ou lorsque le premier est la même partie ou les mêmes parties du second que le troisième l'est du quatrième.*

C'est cette définition *7.21* qui a posé le plus problème : on sait ce que sont des suites proportionnelles mais la définition ne nous est pas immédiatement opératoire.

En fait il faut l'interpréter comme : $a/b = c/d$ (ce qui se note plus volontiers a: b::c:d) si

ou	$a = \lambda b$ et $c = \lambda d$	le 1er est le même mult...
ou	$b = \mu a$ et $d = \mu c$	le 1er est la même partie...
ou	$(a,b) = \Delta 1$ et $(c,d) = \Delta 2$	le 1er est les mêmes parties...

$a = a'\Delta 1$, $b = b'\Delta 2$, $c = c'\Delta 1$, $d = d'\Delta 2$

les mêmes parties veulent dire il y en a le même nombre donc $a' = c'$ et $b' = d'$.
Le théorème *7.19* exploite cette définition et établit l'unicité du pythmène (ou rapport "simplifié" a' : b')

Df 7.22 *Les nombres plans et solides semblables sont ceux qui ont leurs côtés proportionnels.*

Df 7.23 *Le nombre parfait est celui qui est égal à ses parties.*

Pour *df. 23* le nombre parfait est celui qui est égal à la somme de ses diviseurs autre que lui-même (mais 1 inclus). Là encore la définition n'est pas immédiate. "Euclide" connaissait parfaitement une formule de génération des nombres parfaits pairs : tout nombre de la forme :

$2^n (2^{n+1} - 1)$ si $2^{n+1} - 1$ est premier.

Ce sont par exemple 6, 28 puis 496... Cette notion semble de peu de portée de nos jours ; en fait outre des connotations Pythagoriciennes ces nombres sont utilisés dans les calculs de quantièmes pour tenir lieu de "grandes unités".

4. La proposition 7.1

Cette proposition *7.1*, l'une des plus connues d'Euclide, présente beaucoup d'intérêt car elle présente une méthode, l'antypharèse, qui est plusieurs fois reprise dans les livres d'Euclide. La proposition *7.2* où il s'agit de trouver le plus grand diviseur commun de deux nombres utilise l'antypharèse pour donner ce que la tradition nomme l'algorithme d'Euclide.

Au livre X, on retrouve ce même procédé pour définir la notion de grandeurs "incommensurables" : *Df. 10.2* "On appelle grandeurs incommensurables, celles qui n'ont

aucune commune mesure". La proposition *10.2* caractérise les grandeurs incommensurables par un antypharèse sans fin : prop. *10.2* : "Deux grandeurs inégales étant proposées, et si la plus petite étant toujours retranchée de la plus grande, le reste ne mesure jamais le reste précédent ; ces grandeurs seront incommensurables". Cette caractérisation est très importante puisqu'elle a permis de trouver des grandeurs géométriques incommensurables avant même d'en connaître la valeur : c'est le cas du nombre d'or rencontré dans le pentagone régulier où la proportion est telle que
x:1::1:x-1 à l'évidence l'antypharèse se poursuit indéfiniment.

On peut faire quelques remarques :

1/ Nulle part n'est utilisée ni définie la notion de division fut-elle euclidienne. En effet la division n'est pas une "loi de composition interne" dans l'ensemble des entiers. La méthode d'antypharèse se ramène à une suite de soustractions, opération non définie car supposée première.

2/ On peut se poser la question du pourquoi du support géométrique pour expliciter le raisonnement ?

Enfin il peut être intéressant de rechercher quelles sont les "notions communes" admises par Euclide dans sa démonstration :
- si les nombres ne sont pas premiers, quelques nombres les mesurent : deux entiers ont toujours une partie aliquote l'unité s'ils sont co-premiers (par définition 7.13) sinon un "nombre" c'est-à-dire un entier supérieur à 1 .
- La relation X "mesure" Y est transitive, et de plus si X mesure A et B , X mesure A + B .

Il faut alors montrer exactement le raisonnement et l'algorithme sous-jacent. L'emploi de l'outil informatique est ici intéressant car on peut écrire un programme qui colle parfaitement au calcul d'Euclide.

Voici une réalisation sous basic Microsoft V5. +

```
1000    INPUT "A=";A : INPUT "B=";B
1010    WHILE A ≠ B
1020            IF A>B THEN SWAP (A,B)
1030            WHILE A<B
1040                    B = B - A
1050            WEND
1060    WEND
1070    IF A = 1 THEN PRINT "Premiers" ELSE PRINT "Composés"
```

Le même programme donne le PGCD ; c'est A (voir la prop. *7.2*)
Un calcul préalable "à la main" aide à comprendre ce programme.

5. Quelques voies pour des travaux interdisciplinaires
Mathématique / Philosophie / Histoire

L'étude des thèmes suivants doit pour être rentable faire en liaison avec le cours de philosophie et/ou d'histoire.

1/ Qu'est-ce que le "Corpus Euclidien" ?
Comment et pourquoi s'est construit ce monument de rationalité au IVe siècle avant J.C. ?
Quel rapport entretient-il, le Corpus Platonicien ?

Quel est sa place dans le développement de la pensée rationnelle ?

En histoire : étude des conditions politiques et de leur évolution dans le monde grec des VI et V siècles, du mouvement des idées liées aux premières tentatives dans l'histoire d'instaurer une gestion rationnelle des problèmes de la cité et plus spécifiquement de la place et du rôle du développement des mathématiques dans celui-ci.

En philosophie : la réalité chez Platon, l'influence de la doctrine des idées Platoniciennes sur la mathématique.

2/ Avant les grecs peut-on parler de mathématique(s) ?

En philosophie : Technique et Science...

Histoire : état de la science des calculs chez les babyloniens et les égyptiens.

3/ La "crise des irrationnels"

En philosophie : comment la vision du monde a-t-elle changé dès lors que l'on a rencontré des quantités "irrationnelles" ? L'"infini" entre dans la mathématiques.

4/ La "logistique" des grecs

Comment réalisait-on effectivement les calculs ?
En quoi la notation des nombres a-t-elle influé sur la vision des calculs ?

5/ Etudier l'influence des "notations" sur la pratique mathématique

6/ Euclide aujourd'hui

Comment voit-on aujourd'hui la mathématique ? Le discours d'Euclide est-il toujours "vrai" ? Le rôle de l'émergence des géométries non euclidiennes dans la distinction du vrai et du valide.

6. Conclusion (très provisoire)

L'étude d'un texte ancien est très motivante pour les élèves. Elle offre un cadre permettant de soulever des questions qui ne peuvent l'être dans un cours traditionnel.

Etudier un texte ancien fournit un cadre dans lequel on peut se poser des questions sur ce qu'étaient les mathématiques à leur début, sur leur finalité, leur utilité dans les mondes babylonien et égyptien, puis en Grèce après la rupture qui s'est opérée aux Ve et IVe siècles.

1/ Babylone vit l'essor d'une religion liée à l'astrologie/nomie d'où une nécessité de calculs et de mesure de durées et d'angles ainsi que des recherches "gratuites" sur les nombres.

2/ En Egypte, la tradition veut que les crues du Nil obligent les géomètres à reprendre régulièrement le cadastre. En fait une administration centrale très efficace avec son armée de scribes a rendu nécessaire la maîtrise des calculs.

3/ En Grèce, la recherche mathématique a une apparence moins utilitaire ; il s'agit de concilier la philosophie naissante avec Platon et les mécanismes de la pensée spéculative. Contrairement à ce que faisaient croire les sophistes, l'activité mathématique démonstrative permet de découvrir des nouvelles vérités et ne se borne pas à énoncer des tautologies sans intérêt voire des paradoxes. Socrate puis Platon ont eu raison : le logos est créateur.

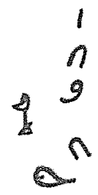
On peut mettre l'accent sur le fait que globalement la mathématique est avant tout une pensée dont le développement a joué un rôle considérable sur celui de la pensée rationnelle et philosophique puisqu'elle a servi de banc d'essai et de paradigme à celle-ci. La mathématique a donné matière à réflexions philosophique sur les notions de vérité, de démonstration et donc sur les principes de la logique, avant d'offrir un cadre de pensée et un langage pour la compréhension du monde physique.

APPENDICE 1 : Calculs "égyptiens"

Les grecs distinguaient la "mathématique" et l'"arithmétique", sciences déductives de la "logistique" qui se rapportait à l'art du calcul. Ceux-ci se faisaient probablement par des méthodes empruntées aux égyptiens et utilisaient les propriétés de la base deux - d'où l'importance de l'étude du pair et de l'impair -.

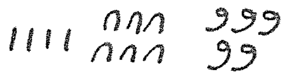
Les égyptiens utilisent une numération décadique additive. Il n'y a pas d'addition à proprement dire : il suffit de juxtaposer les écritures puis de regrouper le cas échéant :

Exemples de nombres en notation égyptienne :

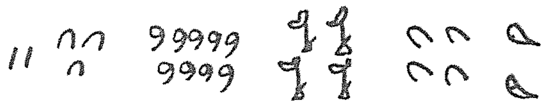


= une unité
= une dizaine
= une centaine
= un millier
= dix mille
= cent mille

d'où 564 s'écrit :



244932 s'écrit :



Il n'en est pas de même pour les multiplications qui relèvent effectivement de la logistique :

Voyons pratiquement comment peut se réaliser une "multiplication".

Par exemple : soit à multiplier 33 par 25 (dans le texte mot à mot on trouve : "compte avec 33, 25 fois")

Une disposition pratique serait :

33	33	/25
66		12
132		6
264+	264	/3
528+	528	1/
	___	
	825	

Cette méthode revient à décomposer en base deux le multiplicateur 25 en remarquant que c'est 1 + 8 + 16 et de faire des duplications de multiplicande et cocher les termes à additionner (ceux qui correspondent à un multiplicateur) avant dimidiation).

Les seules opérations nécessaires pour effectuer une multiplication sont alors la duplication (doublement) et la dimidiation (division par deux) et bien sur l'addition.

On voit l'importance des notions de pair/impair et des définitions *7.6* à *7.11*.

Un programme "Basic" (sous Microsoft V.5.+) suivant cet algorithme est :

```
1000 REM Multiplication égyptienne
1010 INPUT "a=";A : INPUT "b=";B
1020 C=0
1030 WHILE B>0
1040         B=B/2
1050         IF B<>INT(B) THEN C=C+A:B=INT(B)
1060         A=A*2
1070 WEND
1080 PRINT "Résul=";C
1090 END
```

Dans le même ordre d'idées, Platon avait remarqué que les nombres étaient engendrés par deux procédés à partir de l'unité : ajout de l'unité et duplication ; ce qui revient à l'écriture en base deux. Par exemple 25 est engendré par la suite :
1, x2, +1, x2, x2, x2, +1 ce qui revient à écrire 25 en base deux : 25 = 11001.

On peut remarquer que c'est une transposition de cet algorithme qui a servi à Briggs au XVIème pour réaliser sa première table de logarithmes décimaux.

La division est la réciproque de la multiplication et le schéma le même :
Soit à diviser 825 par 33 (ce qui "tombe juste")

```
  1 /     33+
  2       66
  4      132
  8 /    264+
 16 /    528+
 32     1056
___     ____
 25      825
```

Dans le cas où la division ne tomberait pas juste alors interviennent les calculs sur les fractions. Seules sont considérés les quantièmes (de la forme 1h hormis 2/3). Des tables de calculs donnent les duplications de ces quantièmes pour poursuivre en deçà de l'"unité". On trouve par exemple dans le papyrus Rhindt les duplications des quantièmes de 1/5 à 1/101 pour les valeurs impaires des "dénominateurs" par exemple il donne : double de 1/5=1/3+1/15; double de 1/15=1/10+1/30 etc...

APPENDICE 2 : Eléments de bibliographie

1. Le livre le plus accessible et qui traite largement du sujet est :

Nombre, mesure et continu. Epistémologie et histoire.
Par Jean DHOMBRES chez CEDIC (Publication de l'IREM de NANTES)
Pour une bibliographie très complète on peut se reporter à celle de J. DHOMBRES pages 307 à 310.

2. On peut se procurer auprès du CRDP de POITIERS :

Textes mathématiques pour terminales A
Par une équipe de professeurs de l'Académie

3. *Les livres arithmétiques d'Euclide*
Par Jean ITARD (1961)

4. Plus difficile car très spécialisé :

La construction de type mathématique de l'idéalité dans la pensée grecque.
Par M. CAVEING (Thèse publiée en 1982 à LILLE III)
En particulier pages 1261 sq. Euclide, prop. 7.1 et page 1565 pour Def. 7.1

5. Un livre récent :

Pour l'honneur de l'esprit humain
Jean Dieudonné, Hachette, PARIS 1987
(On regardera en particulier le § 3, "Objets et méthodes des mathématiques classiques" qui traite du "miracle grec" et de la naissance des mathématiques - au sens de déductives.

6. Un livre indispensable et bon marché :

Une histoire des mathématiques
A. Dahan-Dalmedico et J. Peiffer
Collection Points-Sciences au Seuil PARIS, 1986.

APPENDICE 3 : Plan des livres d'Euclide

Proclus au Ve siècle après J.C. affirme qu'en rassemblant les Eléments Euclide "en a coordonné beaucoup d'Eudoxe, perfectionné beaucoup de théétète et qu'il a évoqué dans d'irréfutables démonstrations ceux que ses prédécesseurs avaient montré d'une manière relâchée".

Livre 1	Géométrie Définitions et notions communes Triangle, parallélogramme, constructions géométriques, aires, figures équivalentes (Contient en "demande" le Postulat d'Euclide)
Livre 2	Géométrie "Algèbre Géométrique" : produit de nombres et aires de rectangles, le produit de trois nombres est assimilé à un volume...
Livre 3	Géométrie Le cercle
Livre 4	Géométrie Polygones réguliers; inscription dans un cercle
Livre 5	Théorie des proportions Les "grandeurs" e sont pas a priori numériques ni même commensurables mais satisfont à l'"axiome d'Archimède" (Df. *5.4*)
Livre 6	Application des aires Application du Livre V à la Géométrie : construction d'une figure égale à une figure donnée et semblable à une 3ème (ce qui revient à résoudre géométriquement des équations quadratiques)
Livres 7 8 et 9	Livres arithmétiques Théorie des proportions appliquée aux nombres. Recherches de PGCD (Prop. 5.2) ; infinité des nombres premiers (prop. *9.20*)
Livre 10	Quantités irrationnelles quadratiques Démonstrations de transformations de quantité irrationnelles quadratiques et biquadratiques, classification de ces quantités.
Livre 11	Géométrie dans l'espace
Livre 12	Aires curvilignes et polygones Principe d'exhaustion
Livre 13	Les polyèdres réguliers Les solides Platoniciens
Livres 14 et 15	... ajouts tardifs...

ANNEXE 1

1. Extrait de "de l'art de persuader" de Pascal.

Dans cet extrait Pascal s'efforce de trouver les caractéristiques du discours démonstratif. Il explicite le statut des différents type d'énoncés qui le constituent : définitions, axiomes, théorèmes et explique leurs rôles respectifs dans les chaînes démonstratives.

Ce texte peut faire l'objet d'une étude en classe. Il peut notamment :
1) servir de support aux réflexions sur la notion de démonstration demandées aux élèves à la fin du chapitre V ;
2) être lu en parallèle avec une démonstration d'Euclide et voir si Pascal décrit très exactement ou non les canons du discours démonstratif euclidien.

2. Introduction au livre de Hilbert : "les fondements de la géométrie".

Ce texte à travers l'exemple de la géométrie aborde le problème de "l'évidence", de la conception du "vrai" en géométrie et de leurs variations dans le temps.

Pour Legendre - Eléments de géométrie, 1794 - et on peut supposer qu'il en fut de même pour Euclide et ses successeurs, la géométrie est vraie car elle repose sur des axiomes qui sont des "propositions évidentes par elles-mêmes!!

Cette conception universellement partagée à l'époque, fut bouleversée par l'émergence des géométries non euclidiennes et les preuves de non contradiction relative qui furent produites (si l'une de ces géométries renferme une contradiction alors la géométrie euclidienne est elle- même contradictoire). Pash (1822) a l'idée qu'une géométrie peut être conçue comme une modélisation de l'espace.

Dès 1891 Veronèse énonce ce qui allait devenir le credo des formalistes, à savoir qu'une géométrie n'a pas à être déclarée vraie ou fausse par rapport à une évidence d'ordre "expérimentale", mais être cohérente (ne pas renfermer en son sein deux énoncés contradictoires) et qu'en conséquence, pouvait être pris pour axiome toute propriété non contradictoire avec les propositions antérieures.

Note : la lecture de ce texte peut être l'occasion d'une réflexion sur des questions d'ordre pédagogique.
- quelle attitude adoptée face à ce que les élèves déclarent "évident" ?
- que recouvre ce vocable ?
- à quelle conception doit-on essayer de les amener sur ce sujet.

Du débat qui a eu lieu au sein du groupe sur ce sujet, il ressort que "évident" signifie en général pour l'élève :
"Il est réellement clair que ce résultat est vrai, que je ne comprend pas qu'on en discute et moins encore qu'on cherche à le démontrer".
Ou bien,
évident à le sens de facile, trivial.
Ces deux sens distingués, seul le premier a retenu l'attention.
Il a semblé se dégager de la discussion que le traitement de cette évidence est à moduler en fonction de l'énoncé auquel il s'applique.

Exemple 1 : il semble évident aux élèves, cela fait partie de leur culture que si on donne deux droites parallèles, toute droite qui coupe l'une coupe l'autre.
Néanmoins cet énoncé fait souvent l'objet de démonstration auprès des débutants en géométrie.
Doit-on le démontrer ?

L'opinion majoritaire a été qu'au niveau de débutants (jusqu'à la seconde incluse) le point de vue de Pascal doit être suivi : "ne démontrer aucune des choses très connues d'elles-mêmes". Le point de vue moderne (cf. Veronese) devant être réservé à des étudiants ayant déjà une culture scientifique suffisamment importante pour leur permettre de comprendre la problématique qui a conduit à ce point de vue (la naissance des géométries non euclidiennes).
On pourra à ce sujet se reporter aux activités de la fin du chapitre V.

Exemple 2 : il semble en général évident, à un certain niveau, (faire des tests pour savoir jusqu'à quel niveau) pour la plupart des élèves que
si $a > 0$ alors $a^2 \geq a$.

Ce type de proposition (vraie sur les entiers et fausse sur les rationnels ou les réels) peut être l'occasion de faire réfléchir les élèves sur la notion d'évidence, de la distinguer de la notion de croyance commune, intuitive, de les faire réfléchir sur l'origine de leur erreur (probablement transfert des propriétés des entiers, bien connus et assimilés aux autres nombres mal maîtrisés).
Si cet exemple paraît trop simpliste, on pourra se reporter à ceux donnés au début du chapitre V.

Extrait de l'art de persuader : Pascal

"Cet art que j'appelle l'art de persuader, et qui n'est proprement que la conduite des preuves méthodiques parfaites, consiste en trois parties essentielles : à définir les termes dont on doit se servir par des définitions claires ; à proposer des principes ou axiomes évidents pour prouver la chose dont il s'agit ; et à substituer toujours mentalement dans la démonstration les définitions à la place des définis.

Et la raison de cette méthode est évidente, puisqu'il serait inutile de proposer ce qu'on veut prouver et d'en entreprendre la démonstration, si on n'avait auparavant défini clairement tous les termes qui ne sont pas intelligibles ; et qu'il faut de même que la démonstration soit précédée de la demande des principes évidents qui y sont nécessaires, car si on n'assure le fondement on ne peut assurer l'édifice ; et qu'il faut enfin en démontrant substituer mentalement les définitions à la place des définis, puisque autrement on pourrait abuser des divers sens qui se rencontrent dans les termes. Et il est facile de voir qu'en observant cette méthode on est sûr de convaincre, puisque, les termes étant tous entendus et parfaitement exempts d'équivoques par les définitions à la place des définis, la force invincible des conséquences ne peut manquer d'avoir tout son effet.

Aussi jamais une démonstration dans laquelle ces circonstances sont gardées n'a pu recevoir le moindre doute ; et jamais celles où elles manquent ne peuvent avoir d'effet de force.

Il importe donc bien de les comprendre et de les posséder, et c'est pourquoi, pour rendre la chose plus facile et plus présente, je les donnerai toutes en ce peu de règles qui renferment tout ce qui est nécessaire pour la perfection des définitions, des axiomes et des démonstrations, et par conséquent de la méthode entière des preuves géométriques de l'art de persuader.

Règles pour les définitions :
1. N'entreprendre de définir aucune des choses tellement connues d'elles-mêmes, qu'on n'ait point de termes plus clairs pour les expliquer.
2. N'admettre aucun des termes un peu obscurs ou équivoques, sans définition.
3. N'employer dans la définition des termes que des mots parfaitement connus, ou déjà expliqués.

Règles pour les axiomes.
1. N'admettre aucun des principes nécessaires sans avoir demandé si on l'accorde, quelque clair et évident qu'il puisse être.
2. Ne demander en axiomes que des choses parfaitement évidentes d'elles-mêmes.

Règles pour les démonstrations.
1. N'entreprendre de démontrer aucune des choses qui sont tellement évidentes d'elles-mêmes qu'on n'ait rien de plus clair pour les prouver.
2. Prouver toutes les propositions un peu obscures, et n'employer à leur preuve que des axiomes très évidents, ou des propositions déjà accordées ou démontrées.
3. Substituer toujours mentalement les définitions à la place des définis, pour ne pas se tromper par l'équivoque des termes que les définitions ont restreints.

Voilà les huit règles qui contiennent tous les préceptes des preuves solides et immuables. Desquelles il y en a trois qui ne sont pas absolument nécessaires, et qu'on peut négliger sans erreur ; qu'il est même difficile et comme impossible d'observer toujours exactement, quoiqu'il soit plus parfait de le faire autant qu'on peut ; ce sont les trois de chacune des parties :

Pour les définitions : ne définir aucun des termes qui sont parfaitement connus.

Pour les axiomes : n'admettre à demander aucun des axiomes parfaitement évidents et simples.

Pour les démonstrations : ne démontrer aucune des choses très connues d'elles-mêmes.

Car il est sans doute que ce n'est pas une grande faute de définir et d'expliquer bien clairement des choses, quoique très claires d'elles-mêmes, ni d'admettre à demander par avance des axiomes qui ne peuvent être refusés au lieu où ils sont nécessaires, ni enfin de prouver des propositions qu'on accorderait sans preuve.

Mais les cinq autres règles sont d'une nécessité absolue, et on ne peut s'en dispenser sans un défaut essentiel et souvent sans erreur ; et c'est pourquoi je les reprendrai ici en particulier.

Règles nécessaires pour les définitions : n'admettre aucun des termes un peu obscurs ou équivoques sans définition. N'employer dans les définitions que des termes parfaitement connus ou déjà expliqués.

Règles nécessaires pour les axiomes : ne demander en axiomes que des choses parfaitement évidentes.

Règles nécessaires pour les démonstrations : prouver toutes les propositions, en n'employant à leur preuve que des axiomes très évidents d'eux-mêmes, ou des propositions déjà montrées ou accordées. N'abuser jamais de l'équivoque des termes, en manquant de substituer mentalement les définitions qui les restreignent ou les expliquent.

Voilà les cinq règles qui forment tout ce qu'il y a de nécessaire pour rendre les preuves convaincantes, immuables, et, pour tout dire, géométriques ; et les huit règles ensemble les rendent encore plus parfaites.

Je passe maintenant à celle de l'ordre dans lequel on doit disposer les propositions, pour être dans une suite excellente et géométrique... Après avoir établi...

Voilà en quoi consiste cet art de persuader, qui se renferme dans ces deux règles : définir tous les noms qu'on impose ; prouver tout, en substituant mentalement les définitions à la place des définis."

Introduction au livre de Hilbert : les fondements de la géométrie

"L'importance de la géométrie dans les applications et la qualité de l'exposé qu'en a donné Euclide, ont parfois incité à présenter cette science à des élèves trop jeunes pour qu'ils puissent apprécier la subtilité des conventions admises initialement et analyser leur acquisition. En fait, l'enseignement classique ne peut valablement aborder les problèmes délicats par les fondements de la géométrie. Aussi préfère-t-il, en général, considérer que les innombrables applications, à la vie quotidienne et à la technique, donnent à ses propositions un caractère de certitude intuitive.

L'aventure non euclidienne aurait pu bousculer les idées reçues. Ce ne fut pas le cas. Au XVIIIe siècle, G. Saccheri, puis J.H. Lambert, ont cru justifier la théorie classique. Leurs démonstrations, actuellement inacceptables, reviennent à substituer à l'ancien postulat d'Euclide ([1]) d'autres propositions beaucoup plus difficiles à exposer. Le problème prend un caractère nouveau avec les travaux de K.F. Gauss, de Wolfgang et Janos Bolyai, de N. Lobatchevski, puis de B. Riemann. Leurs géométries, élaborées rationnellement, sont exemptes de contradiction dans la partie acquise ; maintes de leurs propositions sont opposées à celle de la science classique. Cependant, la question restait ouverte à savoir si on ne découvrirait pas une contradiction interne à cette science hétérodoxe. Dès 1868, E. Beltrami, par ses travaux sur la pseudosphère ([2]), puis Félix Klein dans son étude de la géométrie cayleyenne ([3]) et plus tard Henri Poincaré, ont démontré la vanité de la recherche de la contradiction ; il y a solidarité logique entre les géométries euclidienne et non euclidienne ; si la seconde devait s'écrouler sous le coup d'une contradiction, il en serait de même pour la première. L'importance de cette découverte ne semble pas avoir été bien comprise, hors d'un cercle assez étroit de spécialistes. L'existence de la géométrie non euclidienne prouve la capacité de l'esprit à créer de toutes pièces un domaine de pensée dont la contradiction avec les "vérités intuitives" est flagrante.

Au XIXème siècle, la place donnée à l'enseignement de la géométrie classique, l'intérêt suscité par le développement des méthodes analytiques, différentielles ou projectives, les succès de la mécanique rationnelle n'incitent guère les chercheurs de valeur à étudier le problème des fondements de la géométrie. L'autorité d'Euclide est encore immense, en pays anglo-saxon notamment ; sur le continent les Eléments de géométrie ([4]) de Legendre jouissent d'un grand prestige. Ce livre a été employé pendant près d'un siècle. Pour l'auteur, la géométrie repose sur certain axiomes ; chacun de ceux-ci est "une proposition évidente par elle-même". Une telle affirmation exclut toute discussion et, si on l'admet, la géométrie est naturellement "vraie".

Mais le cadre précédent devait se révéler trop rigide. L'existence de la géométrie non euclidienne, l'extension de celle-ci par Riemann au cas où deux droites coplanaires se rencontrent toujours, la considération des géométries multidimensionnelles le faisaient éclater. La contradiction entre la rigidité des conceptions classiques et la puissance des créations nouvelles montrait que certains problèmes de base étaient mal posés, celui de l'origine des axiomes notamment.

Au XVIIIème siècle, A.C. Clairaut ([1]) et après lui, Louis Bertrans ([2]) ont développé des idées très différentes. Selon eux, pour établir la géométrie, il faut observer le monde matériel et même expérimenter. Cette large base intuitive acquise, l'application du raisonnement doit suivre et conduire aux théorèmes importants. Le prestige des Eléments de Legendre éclipse ces tentatives.

Un des premiers mathématiciens à faire campagne pour combattre le "faux point de vue métaphysique", trop souvent admis à l'époque est Jules Hoüel qui, en 1867, publie son Essai critique sur les principes fondamentaux de la géométrie. Il y critique vivement la qualité de vérités nécessaires attribuées aux axiomes et l'emploi de l'évidence "si commode à invoquer quand les raisons solides font défaut". Il insiste sur l'importance de l'observation du monde extérieur dans le choix des axiomes. Il met en parallèle les géométries euclidienne et non euclidienne ; sa préférence va à la première, à cause du nombre immense de vérification physiques dont elle a été l'objet. Mais Hoüel ne prépare aucun ouvrage d'enseignement.

Au contraire, en 1874, Charles Méray publie ses Nouveaux éléments de géométrie. Dès l'abord, il propose à son lecteur d'observer les propriétés des déplacements des solides. A partir de là, il explicite une quarantaine d'axiomes très différents de ceux admis par Legendre. Il a conscience du fait qu'ils ne sont probablement pas indépendants. Comme son but n'est pas de faire de la critique logique, mais bien de donner une forme nouvelle aux éléments, il ne s'attarde pas à cette question. Méray innove sur un autre point ; il aborde simultanément l'étude du plan et celle de l'espace. Cette nouveauté est plus souvent citée que le système d'axiomes admis.

A la même époque, Moritz Pasch reprend une tradition interrompue depuis fort longtemps, il consacre une partie de ses cours universitaires aux fondements de la géométrie. Il publie le résultat de ses réflexions dans ses Leçons de géométrie moderne (Vorlesungen über neuere Geometrie, 1882).

Pour lui, les axiomes sont suggérés par l'observation du monde extérieur. Il les classe de façon quelque peu hétéroclite. Dans un premier groupe, il met les propositions relatives à la droite ; le second est consacré au plan. Ces deux groupes lui permettent d'établir l'essentiel des géométries projective et affine ([1]). Puis il ajoute le troisième groupe, consacré à la congruence (égalité) des figures. Il peut alors obtenir la géométrie ordinaire. Pour la première fois, Pasch porte son attention sur les questions relatives à l'ordre des points sur une droite ; sur ce sujet, il explicite des axiomes sont, avant lui, on faisait souvent un usage implicite. Son nom est resté attaché à un axiome d'ordre particulièrement important ([2]).

Le système d'axiomes de Pasch a été quelque peu perfectionné par Giuseppe Peano ([3]) qui en réduit le nombre. Un progrès est décisif : le problème de l'indépendance des axiomes est bien posé.

En 1891, Giuseppe Veronese publie un important ouvrage sur les fondements de la géométrie ([4]). Il y fait une distinction précise entre les sciences logiques, dont l'exactitude n'est liée qu'à leur cohérence interne, et les sciences expérimentales, soumises en outre au contrôle de l'observation du monde extérieur. Il insiste sur le fait que toute hypothèse, ou tout axiome, qui n'est pas en contradiction avec une proposition antérieure peut être admise. L'esprit est libre en ces matières et aucune restriction ne peut lui être imposée par une forme quelconque de vérité acquise ou apparemment évidente. Veronese considère que la géométrie est multidimensionnelle et que la limitation à trois du nombre des dimensions est imposées par un axiome de caractère accidentel ou contingent, au même titre que celui des parallèles.

Le problème des fondements de la géométrie projective a préoccupé certains géomètres de la première moitié du XIXe siècle C. Von Staudt ([5]) en a proposé une première solution, encore insuffisante en certains domaines. Comme nous venons de le voir, Pasch lui fait faire quelques progrès. En 1898, Federigo Enriques publie en librairie ses Leçons de géométrie projective ([6]) ; il y explicite nettement les axiomes de cette sciences ; il en constitue trois groupes caractérisés par les relations qu'ils établissent et non par les figures auxquelles ils s'appliquent. Il ne semble pas que l'oeuvre de Hilbert ait été influencée par celle d'Enriques, puisque les premières réflexions du premier sur la géométrie sont nettement antérieures aux publications de ce dernier."

La logique ou l'art de penser

Arnault et Nicole
Contenant, outre les règles communes, plusieurs observations nouvelles, propres à former le jugement.

Chapitre XI : **La méthode des sciences réduite à huit règles principales**

On peut conclure de tout ce que nous venons de dire, que pour avoir une méthode qui soit encore plus parfaite que celle qui est en usage parmi les géomètres, on doit ajouter deux ou trois règles aux cinq que nous avons proposées dans le Chapitre II. De sorte que toutes ces règles se peuvent réduire à huit :

Dont les deux premières regardent les idées, et se peuvent rapporter à la première partie de cette logique.

La troisième et la quatrième regardent les axiomes, et se peuvent rapporter à la seconde partie.

La cinquième et la sixième regardent les raisonnements, et se peuvent rapporter à la troisième partie.

Et les deux dernières regardent l'ordre, et se peuvent rapporter à la quatrième partie.

Deux règles touchant les définitions :

1. Ne laisser aucun des termes un peu obscurs ou équivoques sans le définir.

2. N'employer dans les définitions que des termes parfaitement connus ou déjà expliqués.

Deux règles pour les axiomes :

3. Ne demander en axiomes que des choses parfaitement évidentes.

4. Recevoir pour évident ce qui n'a besoin que d'un peu d'attention pour être reconnu véritable.

Deux règles pour les démonstrations :

5. Prouver toutes les propositions un peu obscures, en n'employant à leur preuve que les définitions qui auront précédé, ou les axiomes qui auront été accordés, ou les propositions qui auront déjà été démontrées.

6. N'abuser jamais de l'équivoque des termes, en manquant de substituer mentalement les définitions qui les restreignent et qui les expliquent.

Deux règles pour la méthode :

7. Traiter les choses, autant qu'il se peut, dans leur ordre naturel, en commençant par les plus générales et les plus simples, et expliquant tout ce qui appartient à la nature du genre, avant que de passer aux espèces particulières.

8. Diviser, autant qu'il se peut, chaque genre en toutes ses espèces, chaque tout en toutes ses parties, et chaque difficulté en tous ses cas.

ANNEXE II

1. Le début du premier livre des éléments d'Euclide.

2. Le début du septième livre des éléments d'Euclide.

Ces textes permettent d'illustrer et de comprendre le projet euclidien (cf. chapitre IV) dans deux domaines distincts :
1) celui de la géométrie
2) celui de l'arithmétique

Ils peuvent être mis dans les mains des élèves, sous réserve d'une préparation préalable (cf. chapitre IV), certaines définitions étant totalement obscures ou incompréhensibles si elles sont détachées du contexte démonstratif dans lequel elles interviennent et pour lequel elles ont été conçues. (Il en est ainsi par exemple des définitions 4 et 21 du livre VII). Une stratégie d'exploitation peut consister à faire étudier une démonstration - après l'avoir éventuellement située dans l'ensemble - les définitions, demandes et notions communes sous les yeux de façon à pouvoir dégager les articulations du texte et sa structure.

L'étude des propositions I et II du livre VII peuvent être l'occasion de faire mesurer l'économie de pensée que permet de réaliser l'usage du symbolisme algébrique, et conjointement la puissance de pensée des mathématiciens grecs ainsi que la rigueur et la beauté de leurs démonstrations.

LE PREMIER LIVRE DES ELEMENTS D'EUCLIDE.

Définitions

1. Le point est ce dont la partie est nulle.
2. Une ligne est une longueur sans largeur.
3. Les extrémités d'une ligne sont des points.
4. La ligne droite est celle qui est également placée entre ses points.
5. Une surface est ce qui a seulement longueur et largeur.
6. Les extrémités d'une surface sont des lignes.
7. La surface plane est celle qui est également placée entre ses droites.
8. Un angle plan est l'inclinaison naturelle de deux lignes qui se touchent dans un plan, et qui ne sont point placées dans la même direction.
9. Lorsque les lignes, qui comprennent ledit angle, sont des droites, l'angle se nomme rectiligne.
10. Lorsqu'une droite tombant sur une droite fait deux angles de suite égaux entre eux, chacun des angles égaux est droit ; et la droite placée au-dessus est dite perpendiculaire à celle sur laquelle elle est placée.
11. L'angle obtus est celui qui est plus grand qu'un droit.
12. L'angle aigu est celui qui est plus petit qu'un droit.
13. On appelle limite ce qui est l'extrémité de quelque chose.
14. Une figure est ce qui est compris par une seule ou par plusieurs limites.

15. Un cercle est une figure plane, comprise par une seule ligne qu'on nomme circonférence ; toutes les droites, menées à la circonférence d'un des points placés dans cette figure, étant égales entre elles.
16. Ce point se nomme le centre du cercle.
17. Le diamètre du cercle est une droite menée par le centre, et terminée de part et d'autre par la circonférence du cercle : le diamètre partage le cercle en deux parties égales.
18. Un demi-cercle est la figure comprise par le diamètre, et la portion de la circonférence, soutenue par le diamètre.
19. Un segment de cercle est la figure comprise par une droite et par la circonférence du cercle ; le demi-cercle étant plus grand ou plus petit que le segment.
20. Les figures rectilignes sont celles qui sont terminées par des droites.
21. Les figures trilatères sont terminées par trois droites.
22. Les quadrilatères, par quatre.
23. Les multilatères, par plus de quatre.
24. Parmi les figures trilatères, le triangle équilatéral est celle qui a ses trois côtés égaux.
25. Le triangle isocèle, celle qui a seulement deux côtés égaux.
26. Le triangle scalène, celle qui a ses trois côtés inégaux.
27. De plus, parmi les figures trilatères, le triangle rectangle est celle qui a un angle droit.
28. Le triangle obtusangle, celle qui a un angle obtus.
29. Le triangle acutangle, celle qui a ses trois angles aigus.
30. Parmi les figures quadrilatères, le quarré est celle qui est équilatérale et rectangulaire.
31. Le triangle, celle qui est rectangulaire, et non équilatérale.
32. Le rhombe, celle qui est équilatérale, et non rectangulaire.
33. Le rhomboïde, celle qui a ses côtés et ses angles opposés égaux entre eux, et qui n'est ni équilatérale ni rectangulaire.
34. Les autres quadrilatères, ceux-là exceptés, se nomment trapèzes.
35. Les parallèles sont des droites, qui, étant situées dans un même plan, et étant prolongées à l'infini de part et d'autre, ne se rencontrent ni d'un côté ni de l'autre.

Demandes

1. Conduire une droite d'un point quelconque à un point quelconque.
2. Prolonger indéfiniment, selon sa direction, une droite finie.
3. D'un point quelconque, et avec un intervalle quelconque, décrire une circonférence de cercle.
4. Tous les angles droits sont égaux entre eux.
5. Si une droite, tombant sur deux droites, prolongées à l'infini, se rencontreront du côté où les angles sont plis petits que deux droits.
6. Deux droites ne renferment point un espace.

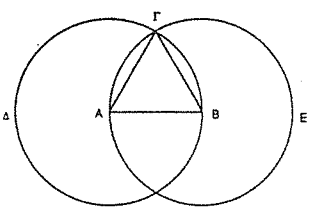
Notions communes

1. Les grandeurs égales à une même grandeur, sont égales entre elles.
2. Si à des grandeurs égales, on ajoute des grandeurs égales, les touts seront égaux.
3. Si des grandeurs égales, on retranche des grandeurs égales, les restes seront égaux.
4. Si à des grandeurs inégales, on ajoute des grandeurs égales, les touts seront inégaux.
5. Di de grandeurs inégales, on retranche des grandeurs égales, les restes seront inégaux.

6. Les grandeurs, qui sont doubles d'une même grandeur, sont égales entre elles.
7. Les grandeurs, qui sont les moitiés d'une même grandeur, sont égales entre elles.
8. Les grandeurs, qui s'adaptent entre elles, sont égales entre elles.
9. Le tout est plus grand que la partie.

Proposition I

Sur une droite donnée et finie, construire un triangle équilatéral.
Exposition. Soit AB une droite donnée et finie.
Détermination. Il faut construire sur la droite finie AB un triangle équilatéral.
Construction. Du centre A et de l'intervalle AB, décrivons la circonférence ArE ; et du point r , où les circonférences se coupent mutuellement, conduisons aux points A, B les droites rA, rB (dem. I).

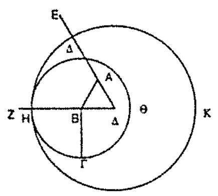


Démonstration. Car, puisque le point A est le centre du cercle BrΔ , la droite Ar est égale à la droite AB (déf. 15) ; de plus, puisque le point B est le centre du cercle ArE , la droite Br est égale à la droite BA ; mais on a démontré que la droite rA était égale à la droite AB ; donc chacune des droites rA, rB est égale à la droite AB ; or, les grandeurs qui sont égales à une même grandeur, sont égales entre elles (not. I) ; donc la droite rA est égale à la droite rB ; donc les trois droites rA, AB, Br sont égales entre elles.

Conclusion. Donc le triangle ABr (déf. 24) est équilatéral, et il est construit suir la droite donnée et finie AB . Ce qu'il fallait faire.

Proposition II

A un point donné, placer une droite égale à une droite donnée.
Soit A un point donné, et Br sur la droite donnée ; il faut au point A placer une droite égale à la droite donnée Br.



Menons du point A au point B la droite AB (dem. I) ; sur cette droite construisons le triangle équilatéral ΔAB (prop. 1) ; menons les droites AE , BZ dans la direction de ΔA , ΔB ; du centre B et de l'intervalle Br, décrivons le cercle rHΘ (dem. 5) ; et de plus, centre Δ et de l'intervalle ΔH , décrivons le cercle HKΛ .
Puisque le point B est le centre du cercle rHΘ , Br est égal à BH (déf. 15) ; de plus, puisque le point Δ est le centre du cercle HKΛ , la droite ΔΛ est égale à la droite ΔH ; mais ΔA est égal à ΔB ; donc le reste AΛ est égal au reste BH (not. 3). Mais on a

démontré que Br est égal à BH ; donc chacune des droites AΛ, Br est égale à BH. Mais les grandeurs qui sont égales à une même grandeur, sont égales entre elles (not. 1) ; donc AΛ est égal à Br.
Donc, au point donné A, on a placé une droite AΛ égale à la droite donnée Br. Ce qu'il fallait faire.

LIVRE SEPTIEME DES ELEMENTS D'EUCLIDE

Définitions

1. L'unité est ce selon quoi chacune des choses existantes est dite une.
2. Un nombre est un assemblage composée d'unités.
3. Un nombre est une partie d'un nombre, le plus petit du plus grand, lorsque le plus petit mesure le plus grand.
4. Un nombre est parties d'un nombre, quand il ne le mesure pas.
5. Un nombre est multiple d'un nombre, le plus grand du plus petit, quand il est mesuré par le plus petit.
6. Le nombre pair est celui qui peut se partager en deux parties égales.
7. Le nombre impair est celui qui ne peut pas se partager en deux parties égales, ou bien celui qui diffère d'une unité du nombre pair.
8. Le nombre pairement pair est celui qui est mesuré par un nombre pair multiplié par un nombre pair.
9. Le nombre pairement impair est celui qui est mesuré par un nombre pair multiplié par un nombre impair.
10. Le nombre impairement pair est celui qui est mesuré par un nombre impair, multiplié par un nombre pair.
11. Le nombre impairement impair est celui qui est mesuré par un nombre impair multiplié par un nombre impair.
12. Le nombre premier est celui qui est mesuré par l'unité seule.
13. Les nombres premiers entr'eux sont ceux qui ont l'unité seule pour commune mesure.
14. Le nombre composé est celui qui est mesuré par quelque nombre.
15. Les nombres composés entr'eux sont ceux qui ont quelque nombre pour commune mesure.
16. Un nombre est dit multiplier un nombre, lorsque le multiplié est ajouté autant de fois qu'il y a d'unités dans celui qui le multiplie, et qu'un nombre est produit.
17. Lorsque deux nombres se multipliant font un nombre, celui qui est produit se nomme plan ; et les nombres qui se multiplient, se nomment les côtés de ce produit.
18. Lorsque trois nombres se multipliant entr'eux font un nombre, celui qui est produit est appelé solide ; et les nombres qui se multiplient, se nomment les côtés du produit.
19. Le nombre quarré est celui qui est également égal, ou celui qui est contenu sous deux nombres égaux.
20. Le nombre cube est celui qui est également égal également, ou bien celui qui est contenu sous trois nombres égaux.
21. Des nombres sont proportionnels, lorsque le premier est le même multiple du second que le troisième l'est du quatrième, ou lorsque le premier est la même partie ou les mêmes parties du second que le troisième l'est du quatrième.
22. Les nombres plans et solides semblables sont ceux qui ont leurs côtés proportionnels.
23. Le nombre parfait est celui qui est égal à ses parties.

Proposition I

Deux nombres inégaux étant proposés, le plus petit étant toujours retranché du plus grand, si le reste ne mesure celui qui est avant lui lorsque l'on a pris l'unité, les nombres proposés seront premiers entr'eux.

A Θ z B

r H Δ

E

Soient les deux nombres inégaux AB , rΔ ; que le plus petit étant toujours retranché du plus grand, le nombre restant ne mesure celui qui est avant lui que lorsque l'on a pris l'unité ; je dis que les nombres AB , rΔ sont premiers entr'eux, c'est-à-dire que l'unité seule les mesure.

Car si les nombres AB , r Δ ne sont pas premiers entr'eux, quelque nombre les mesurera. Que quelque nombre les mesure, et que ce soit E ; que rΔ mesurant AB laisse zA plus petit que lui-même ; que zA mesurant Δr laisse HT plus petit que lui-même ; et qu'enfin HT mesurant ZA laisse l'unité ΘA .

A Θ z B

r H Δ

E

Puisque E mesure rΔ , mesure zB , le nombre E mesure zB . Mais il mesure AB tout entier ; donc il mesurera le reste le reste Az. Mais Az mesure ΔH . Mais il mesure rΔ tout entier ; donc il mesurera le reste rH . Mais rH mesure zΘ ; donc E mesurera zΘ . Mais il mesure ZA tout entier ; donc un nombre mesurera l'unité restante AΘ , ce qui est impossible (déf. 5. 7). Donc, aucun nombre ne mesurera les nombres AB, rΔ sont premiers entr'eux. Ce qu'il fallait démontrer.

Proposition II

Deux nombres non premiers entr'eux étant donnés, trouver leur plus grande commune mesure.

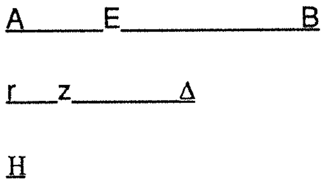
Soient donnés les deux nombres AB, rΔ non premiers entr'eux, et que rΔ soit le plus petit ; il faut trouver la plus grande commune mesure des nombres AB, rΔ .

A B

r Δ

Si rΔ mesure AB , le nombre rΔ sera une commune mesure des nombres rΔ , AB , parce que rΔ se mesure lui-même ; et il est évident qu'il en sera la plus grande, car aucun nombre plus grand que rΔ ne peut mesurer rΔ .

Mais si rΔ ne mesure pas AB , et si on retranche toujours le plus petit des nombres AB , rΔ du plus grand, il restera quelque nombre qui mesurera celui qui est avant lui. On n'aura pas l'unité pour reste ; car si cela était, les nombres AB, rΔ serainet premiers entr'eux, ce qui n'est pas supposé ; il restera donc quelque nombre qui mesurera celui qui est avant lui. Que rΔ mesurant AB laisse EA plus petit que lui-même ; que EA mesurant Δr laisse zr plus petit que lui-même ; et enfin que rz mesure EA . Puisque rz



mesure AE , et que AE mesure Δz , le nombre rz mesurera Δz . Mais il se mesure lui-même ; donc il mesurera rΔ tout entier. Mais rΔ mesure BE ; donc rz mesure BE . Mais il mesure EA ; donc il mesurera BA tout entier. Mais il mesure rΔ ; donc rz mesure AB et rΔ ; donc rz est une commune mesure des nombres AB , rΔ . Je dis qu'il en est la plus grande. Car si rz n'est pas la plus grande commune mesure des nombres AB, rΔ . Je dis qu'il en est la plus grande. Car si rz n'est pas la plus grande commune mesure des nombres AB, rΔ , quelque nombre plus grand que rz mesurera les nombres AB , rΔ . Qu'un nombre plus grand les mesure, et que ce soit H . Puisque H mesure rΔ , et que rΔ mesure BE , le nombre H mesurera BE . Mais il mesure BA tout entier ; donc il mesurera le reste AE . Mais AE mesure Δz ; donc H mesure Δz . Mais il mesure Δr tout entier ; donc il mesurera le reste rz , le plus grand le plus petit, ce qui est impossible ; donc quelque nombre plus grand que rz ne mesurera pas les nombres AB, rΔ ; donc rz est la plus grande commune mesure des nombres AB , rΔ . Ce qu'il fallait démontrer.

Corollaire

Il suit évidemment de là, que si un nombre en mesure deux autres, il mesure aussi leur plus grande commune mesure.

ANNEXE III

1. Extraits du cours de mathématiques de Bezout (1810) et du commentaire de Peyrard. Démonstration de la règle des signes.

2. Extraits d'un article de G. GLAESER : épistémologie des nombres négatifs (dans Recherches en didactique des mathématique - la pensée sauvage 1981 Vol. 23)
a) Témoignage de Stendal
b) Présentation de la démonstration d'Euler
c) Témoignage de Lazare Carnot.

Ces textes illustrant les difficultés qu'ont parfois éprouvé des générations de mathématiciens à justifier leurs usages, c'est-à-dire à les fonder par voie démonstrative, la seule acceptable en mathématiques et donc toujours recherchée en dépit des obstacles rencontrés, parfois insurmontables.

Il convient de remarquer que tant que le statut des nombres négatifs est resté flou, il y a eu impossibilité d'établir de façon interne la règle des signes, d'où les diverses tentatives par voies externes et métaphoriques et les succédanés de démonstrations ainsi produits.

Il convient de remarquer également que ce manque à la "rigueur" habituellement de mise en mathématiques gênait aussi bien de modestes élèves que des mathématiciens de haut niveau - comme en témoigne Stendhal dans la vie d'Henri Brulard (1835) et Lazare Carnot dans sa géométrie de position - et conduisit à un des avatars que connut la notion de démonstration.

Texte 1 :

Cours de mathématiques à l'usage de la marine et de l'artillerie, par BEZOUT, quatrième édition, revue avec le plus grand soin, suivie d'un commentaire par F. PERARD, professeur de mathématiques, au lycée Bonaparte, et renfermant toutes les connaissances nécessaires pour l'admission à l'Ecole Polytechnique.
Troisième partie contenant l'algèbre et l'application de cette science à l'arithmétique et à la géométrie.

L'algèbre de BEZOUT fait partie des livres élémentaires adoptés par l'université impériale.

A PARIS,
Chez GILBERT et Cie, librairies, rue Serpente, N° 10 ;
BECHET, librairie, quai des Augustins, n° 65 ;
ARTHUS-BERTRAND, librairie, rue Hautefeuille ;
VANRAEST et LAPEYRE, lib. quai Dessaix, n° 1 ;
1810.

REGLES DES SIGNES

Multiplication

La multiplication algébrique est une opération par laquelle on répète une grandeur, qu'on nomme multiplicande, avec le même signe ou avec un signe différent, autant de fois que l'indique une autre grandeur qu'on nomme multiplicateur. Le résultat se somme produit.

Pour marquer que le multiplicande doit être pris avec le même signe, on écrit le signe + devant le multiplicateur ; et pour marquer que le multiplicande doit être pris avec un signe différent, on écrit le signe - . Il y a quatre cas :

Premier cas. Soit + a à multiplier par + b , il est évident que le produit est + ab .

Deuxième cas. Soit - a à multiplier par + b , il est encore évident que le produit est - ab .

Troisième cas. Soit + a à multiplier par - b , c'est-à-dire, soit proposé de soustraire + a de zéro, autant de fois que l'indique b , le résultat sera - ab .

En effet, la grandeur à soustraire étant + ab , il est évident que - ab est la différence de zéro, et de la grandeur à soustraire, puisque + ab - ab est égal à zéro.

Quatrième cas. Soit proposé de multiplier - a par - b , c'est-à-dire, soit proposé de soustraire - a de zéro, autant de fois que l'indique b ; le résultat sera + ab .

En effet, la grandeur - ab étant la quantité à soustraire, il est évident que + ab est la différence de zéro et de la grandeur à soustraire, puisque - ab + ab est égal à zéro.

Il suit de là que le produit aura le signe + , si le multiplicande et le multiplicateur ont le même signe, et le signe - , si le multiplicande et le multiplicateur ont des signes différents.

Texte 2

Un symptôme

J'ai été mis sur la voie explorée ici, en lisant "la vie d'Henri Brulard (Stendhal 1835)" autobiographie de Stendhal (1783-1843) (de son vrai nom Henri Beyle). Cet écrivain appartenait aux premières promotions de l'Ecole Centrale de Grenoble : celle-ci est une des premières institutions où l'enseignement des mathématiques était dispensé à partir de 13 ans. Le jeune Henri y étudia de 14 à 17 ans. Il évoque des détails de sa scolarité : témoignage particulièrement précieux (et peut-être unique) sur ce que pouvait être les premiers contacts d'un adolescent avec l'enseignement nouvellement institutionnalisé des mathématiques.Or, ni l'enseignement reçu, ni la lecture du célèbre manuel de Bezout (1772) ne parvinrent à satisfaire la curiosité du jeune élève lorsqu'il voulut comprendre l'origine de la règle des signes. Ses maîtres aussi n'y comprenaient rien ! Ils ne cherchaient pas à comprendre ou à expliquer. Ils contournaient la difficulté en présentant ce point sous forme d'un dogme révélé : "chaque proposition dans le Bezout, écrit Stendhal, a l'air d'un grand secret appris d'une bonne femme voisine".

Voici son témoignage :

Texte de Stendhal

"Suivant moi l'hypocrisie était impossible en mathématiques, et, dans ma simplicité juvénile, je pensais qu'il en était ainsi dans toutes les sciences où j'avais ouï dire qu'elles s'appliquaient. Que devins-je quand je m'aperçus que personne ne pouvait m'expliquer comment il se faisait que : moins par moins donne plus (- x - = +) ? (C'est une des bases fondamentales de la science qu'on appelle "algèbre").

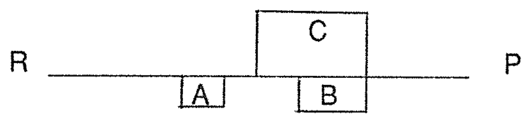
On faisait bien pis que ne pas m'expliquer cette difficulté (qui sans doute est explicable car elle conduit à la vérité), on me l'expliquait par des raisons évidemment peu claires pour ceux qui me les présentaient.

M. Chabert pressé par moi s'embarrassait, répétait sa "leçon", celle précisément contre laquelle je faisais des objections, et finissait par avoir l'air de me dire : "mais c'est l'usage, tout le monde admet cette explication. Euler et Lagrange, qui apparemment valaient autant que vous, l'ont bien admise"

Je fus longtemps à me convaincre que mon objection sur - x - = + ne pourrait pas absolument entrer dans la tête de M. Chabert, que M. Dupuy n'y répondrait jamais que par un sourire de hauteur, et que les "forts" auxquels je faisais des questions se moqueraient toujours de moi.

J'en fus réduit à ce que je me dis encore aujourd'hui : il faut bien que - par - donne + soit vrai, puisque évidemment, en employant à chaque instant cette règle dans le calcul, on arrive à des résultats "vrais et indubitables".

Mon grand malheur était cette figure :



Supposons que RP soit la ligne qui sépare le positif du négatif, tout ce qui est au-dessus est positif, comme négatif tout ce qui est au-dessous ; comment, en prenant le carré B autant de fois qu'il y a d'unités dans le carré A , puis-je parvenir à faire changer de côté au carré C ? Et, en suivant une comparaison gauche que l'accent souverainement traînard et grenoblois de M. Chabert rendait encore plus gauche, supposons que les quantités négatives sont les dettes d'un homme, comment en multipliant 10 000 francs de dette par 500 francs, cet homme aura-t-il ou parviendra-t-il à avoir une fortune de 5 000 000 ?"

On voit qu'ici, Stendhal et ses maîtres se heurtent par deux fois à l'obstacle (4). Le modèle commercial qui facilite la compréhension de l'addition des relatifs est un obstacle à la compréhension de la multiplication.

Ce texte n'est qu'un symptôme d'une incompréhension dont nous suivrons l'histoire de siècle en siècle.

Présentation de la démonstration d'Euler

Léonard Euler (1707-1783) fut assurément un virtuose du calcul. Dans ses articles scientifiques, il manie les nombres relatifs et complexes avec ingéniosité et hardiesse, sans trop soulever de questions au sujet de la légitimité de ses constructions. Mais dans un ouvrage destiné aux débutants (Euler 1770), il fait oeuvre pédagogique et se trouve dans l'obligation de fournir des explications. Notamment il essaie de justifier la règle des signes. Nous découpons son argumentation en trois parties :

1. La multiplication d'une dette par un nombre positif n'offre guère de difficulté : trois dettes de a écus font une dette de 3a écus. Donc b (-a) = - ab .
On remarquera que dans cet exemple, la multiplication est une opération externe. L'argument est donc sans valeur si le multiplicateur n'est pas un entier naturel.

2. Par commutativité, Euler en déduit que (-a) b = - ab.
Argument sans valeur pour une loi externe, que signifie (-3) gains de a écus ?

3. Il reste à déterminer ce qu'est le produit (-a) par (-b) . Il est clair, dit Euler, que la valeur absolue est ab .
Il s'agit donc de se décider entre + ab et - ab . Mais comme (-a) b vaut déjà - ab , il ne reste plus comme unique possibilité que (-a) (-b) = + ab. (!!!)

Cette pirouette ne dépasse guère le niveau de la vulgarisation. Mais si Euler ne fournit pas ici de meilleure justification de la règle des signes, c'est sans doute qu'il n'en connaissait pas de plus valable. Le même ouvrage nous révèle encore un autre obstacle, qu'Euler (et bien d'autres auteurs) n'a pas franchi et qui se rapporte à l'incompréhension de l'unification de la droite numérique. Euler déclare qu'un nombre négatif se représente par une lettre précédée du signe - .

Texte de Lazare Carnot

Le lecteur le plus assidu de d'Alembert est Lazare Carnot (1753-1823). L'"Organisateur de la Victoire" était considéré de son temps comme l'un des plus grands mathématiciens français après Lagrange, Laplace, Legendre et Monge. Sa géométrie de position (Carnot 1803) a joui longtemps d'un immense prestige, que l'on s'explique mal de nos jours. Les apports de l'ouvrage sont assez faibles. Les théorèmes de Carnot ne sont guère que des exercices résolus à l'aide de méthodes désuettes. Le mérite du livre réside dans ses continuelles exigences de clarté. L'auteur s'empêtre systématiquement dans les contradictions des idées reçues et proclame, sans désemparer :
"Je ne comprends pas ! Je ne comprends pas !". Voici quelques échantillons de son ouvrage :
Pour obtenir réellement une quantité négative isolée, il faudrait retrancher une quantité effective de zéro, ôter quelque chose de rien : opération impossible. Comment donc concevoir une quantité négative isolée ?

Et il ajoute :
"Les notions qu'on a données jusqu'ici des quantités négatives isolées, se réduisent à deux ; celle dont nous venons de parler, savoir que ce sont des quantités moindres que zéro, et celle qui consiste à dire que les quantités négatives sont de même nature que les quantités positives, mais prises dans un sens contraire : d'Alembert détruit l'une et l'autre de ces notions. Il repousse d'abord la première par un argument qui me paraît sans réplique.

Soit, dit-il, cette proportion 1 : -1 :: -1 : 1 ; si la notion combattue était exacte, c'est-à-dire, si -1 était moindre que 0, à plus forte raison serait-il moindre que 1 ; donc le second terme de cette proportion devrait être moindre que le troisième ; c'est-à-dire, que 1 devrait être moindre que -1 ; donc -1 serait tout ensemble moindre et plus grand que 1 ; ce qui est contradictoire.

Quant à la seconde des notions données ci-dessus, d'Alembert l'attaque avec le même succès dans son mémoire sur les quantités négatives dont j'ai parlé ci-dessus ; et cependant, comme il n'a rien à mettre à la place, il semble adopter cette notion pour le fond, et vouloir montrer seulement qu'elle est sujette à diverses exceptions. Il est, dit-il, d'autant plus nécessaires de démontrer cette position (des quantités négatives en sens contraires des positives) qu'elle n'a pas toujours lieu."

Voici plus étonnant encore, tiré du même ouvrage :

Une multitude de paradoxes ou plutôt d'absurdités palpables résulteraient de la même notion ; par exemple, - 3 serait moindre que 2 ; cependant $(-3)^2$ serait plus grand que 2^2 , c'est-à-dire qu'entre deux quantités inégales le carré de la plus grande serait moindre que le carré de la plus petite, ce qui choque toutes les idées claires qu'on peut se former de la quantité.

Passons à la seconde notion, qui consiste à dire que les quantités négatives ne diffèrent des quantités positives qu'en ce qu'elles sont prises dans un sens opposé. Cette idée est ingénieuse ; mais elle n'est pas plus juste que la précédente. En effet, si deux quantités, l'une positive, l'autre négative, étaient aussi réelles l'une que l'autre et ne différaient que par leurs positions, pourquoi la racine de l'une serait-elle une quantité imaginaire, tandis que celle de l'autre serait effective ? Pourquoi $\sqrt{-a}$ ne serait-elle pas aussi réelle que $\sqrt{+a}$? Conçoit-on une quantité effective dont on ne puisse extraire la racine carrée? Et d'où viendrait le privilège que la première, -a , aurait de donner son signe au produit $-a \times +a$?"

BIBLIOGRAPHIE COMPLEMENTAIRE

* *De l'esprit géométrique* : Pascal
Ce texte aborde notamment, de façon compréhensible au niveau considéré le problème des termes et notions primitifs et peut servir de point de départ à une réflexion sur les fondements des théories mathématiques.

* *Règles pour la direction de l'esprit* : R. Descartes

* *Pourquoi les mathématiques* : R. Thom
Chapitre "les mathématiques modernes" une erreur pédagogique et philosophique.
Ce texte propose une réflexion et un point de vue sur les trois attitudes qui se rencontrent actuellement dans la communauté mathématique sur la notion de rigueur et sur le problème du sens et pose par conséquent le problème du vrai en mathématiques sous sa forme moderne.

* *Préface de Bourbaki*

* *La mystification mathématique* : A. Bouvier

* *Mathématiques au fil des âges* : IREM, groupe épistémologie et histoire.