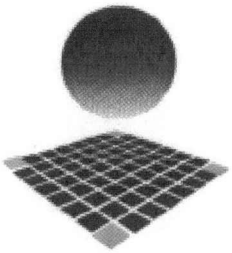
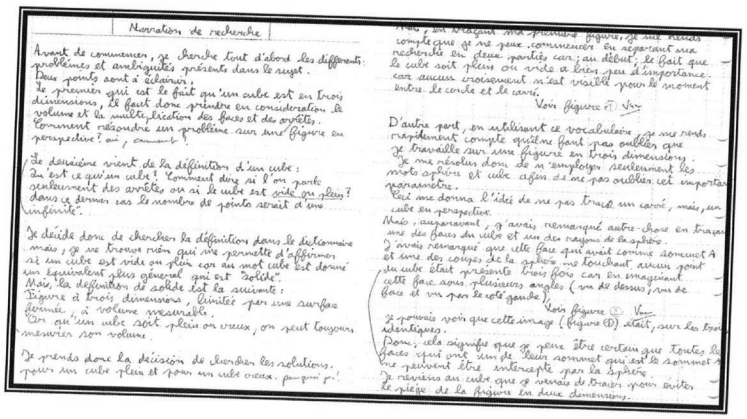
Université Montpellier II



Co-édition (2002) de :

- **L'Institut de Recherche sur L'Enseignement des Mathématiques (IREM) de Montpellier**
- **L'Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public (APMEP)**



Narration de recherche

Avant de commencer, je cherche tout d'abord les différents problèmes et ambiguïtés présents dans le sujet.
Deux points sont à éclaircir.
Le premier qui est le fait qu'un cube est en trois dimensions, il faut donc prendre en considération le volume et la multiplication des faces et des arêtes.
Comment résoudre un problème sur une figure en perspective ? où, comment ?

Le deuxième vient de la définition d'un cube :
Qu'est ce qu'un cube ! Comment dire si l'on parle seulement des arêtes ou si le cube est vide ou plein ? dans ce dernier cas le nombre de points serait à une infinité.

Je décide donc de chercher la définition dans le dictionnaire mais, je ne trouve rien qui me permette d'affirmer si un cube est vide ou plein ou au mot cube est donné un équivalent plus général qui est "solide".
Mais, la définition de solide est la suivante :
figure à trois dimensions, limitée par une surface fermée, à volume mesurable.
Or qu'un cube soit plein ou vide, on peut toujours mesurer son volume.

Je prends donc la décision de chercher les solutions pour un cube plein et pour un cube vide. pourquoi ?!

Mais, en traçant mes premières figures, je me suis compte que je ne peux commencer en séparant mes recherches en deux parties car, au début, le fait que le cube soit plein ou vide a très peu d'importance. car aucun croisement n'est visible pour le moment entre le cercle et le carré.
Voir figure 1. Voir

D'autre part, en utilisant ce vocabulaire, je me rends rapidement compte qu'il ne faut pas oublier que je travaille sur une figure en trois dimensions.
Je me résolus donc de n'employer seulement les mots sphère et cube afin de ne pas oublier cet important paramètre.
Ceci me donna l'idée de ne pas tracer un carré, mais, un cube en perspective.
Mais, auparavant, j'avais remarqué autre chose en traçant une des faces du cube et un des rayons de la sphère.
J'avais remarqué que cette face qui avait comme sommet A et une des coupes de la sphère ne touchait aucun point du cube était présente trois fois car en imaginant cette face sous plusieurs angles (un de dessus, un de face et un par le coté gauche)
Voir figure 1 Voir
Je pouvais voir que cette image (figure 1) était, sur les trois identiques.
Donc, cela signifie que je peux être certain que toutes les faces qui ont un de leur sommet qui est le sommet A ne peuvent être interrompu par la sphère.
Je revenais au cube que je venais de tracer pour éviter le piège de la figure en deux dimensions.

LES NARRATIONS DE RECHERCHE
de l'école primaire au lycée

Freddy BONAFÉ - Arlette CHEVALIER - Marie-Claire COMBES
Alain DEVILLE - Liliane DRAY - Jean-Pierre ROBERT -
- Mireille SAUTER -

A.P.M.E.P.

l'Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public

26, rue Duméril - 75013 Paris

Tél. 01 43 31 34 05 • fax : 01 42 17 08 77 • mel : apmep@apmep.asso.fr

http://www.apmep.asso.fr

Fondée en 1909, toujours dynamique, l'APMEP, c'est :

- **Une réflexion collective** sur le métier d'enseignant de mathématiques et les conditions de son exercice, de la maternelle à l'université, notamment en collèges et lycées ;
- **des interventions suivies** sur l'actualité et les projets à moyen terme ;
- **des textes de base** (chartes, problématiques, prospective bac ...) pour des objectifs à long terme ;
- **un observatoire** (EVAPM) de l'impact des programmes du second degré ;
- **des publications de référence** pour apprendre, enseigner, apprendre à enseigner les mathématiques (Bulletin vert, brochures,...) ;
- (dès janvier 2003) une **revue pour "débutants" PLOT** ;
- **une information rapide** des adhérents : le BGV, un serveur internet, Publimath, ...
- **des instances élues** définissant ses positions ;
- **une organisation décentralisée** en « Régionales » qui ont leurs activités propres et sont les relais entre l'organisation nationale et les adhérents de tous horizons.

L'APMEP agit :

- en réunissant commissions et groupes de travail, sur des thèmes variés, permettant aux adhérents de mettre en commun leur expérience et d'élaborer critiques et propositions ;
- en adoptant sa ligne d'action en accord avec ses adhérents ;
- en la défendant auprès de toutes les instances concernées.

L'APMEP propose ainsi :

- ses choix et des pistes d'action ;
- des outils pour renforcer l'efficacité de l'enseignement de cette discipline.

L'APMEP organise des :

- journées nationales, chaque année sur un site et un thème différents :
  - 1998 : Rouen, *Maths en scène.*
  - 1999 : Gérardmer, *Maths grandeur nature,*
  - 2001 : Lille, *Maths au carrefour de l'Europe*
  - 2002 : Rennes, *Images des maths, Maths des images.*
  - 2003 : Pau, *Mathématiques de la Terre aux Étoiles*
- rencontres régionales ;
- séminaires et des "universités d'été"

En adhérant à l'APMEP, vous pourrez :

- participer à la vie de l'association et à la définition des positions qu'elle défend ;
- contribuer à ses productions, les soutenir par la cotisation et toute implication plus poussée ;
- recevoir chez vous les informations d'actualité sur les mathématiques et leur enseignement ;
- **bénéficier de réductions importantes sur toutes les brochures qu'elle propose..**

À Arlette CHEVALIER, sans qui les narrations de recherche n'auraient pas existé.

Cette brochure rédigée par le groupe Géométrie de l'IREM de Montpellier, est la synthèse des travaux de recherche conduits depuis une dizaine d'années sur les narrations de recherche. Elle repose sur de nombreuses expérimentations effectuées dans les classes de collèges et lycées.

Les auteurs de cette brochure associent à l'élaboration de cet ouvrage Gérard AUDIBERT et André AMSALEM maîtres de conférences de mathématiques à l'USTL de Montpellier, Dominique BUCHETON maître de conférences des sciences du langage et des sciences de l'éducation à l'IUFM Montpellier, ainsi que Noël BASCOU, Robert BRUNET, Jacques NAUDEILLO, Nicole PAILHAS, professeurs de collèges et de lycées qui ont participé, comme membres du groupe géométrie, aux réflexions et travaux de recherche sur ce sujet.

Ce document a été conçu et rédigé grâce aux heures mises à la disposition du réseau des IREM par la DESCO.

Les auteurs :
Freddy BONAFÉ, Arlette CHEVALIER, Marie-Claire COMBES,
Alain DEVILLE, Liliane DRAY , Jean-Pierre ROBERT , Mireille SAUTER

Coordonnateur :
Freddy BONAFÉ

Coédition :
IREM de Montpellier et APMEP

BROCHURE APMEP N° 151
N° ISBN : 2-912-846-27-7

Je trouve que les narration de recherche c'est nul car je ne fais jamais de brouillons et il faut souvent inventé pour que sa face charger. et je trouve sa bien car ces simple [redacted] et sympa.

Je pense que les narrations de recherches servent :
On pense à montrer comment énoncé, et évolué par rapport à un
Plus on fait des narrations plus on se voit penser et on corrige sa manière de penser. Je pense que c'est très bien de faire des narrations de recherches.

Je pense qu'une narration sert à nous permettre de développer notre vitesse de réaction face à un problème.
J'apprécie car cela m'oblige à vraiment me concentrer sur mon travail. C'est très difficile car il faut attendre le déclic.
Viveka

Je trouve également bien cela nous oblige à faire des recherches dans nos connaissance passé et même peut-être futur. De plus cela nous permet de nous préparer à rédiger pour les futurs examens.

C'est ennuyant, long puisqu'il faut tout raconter mais franchement il suffit de réfléchir environ 1h une au lieu d'aller devant la T.V est c'est bon on a entre 12 et 20. Ça remonte la moyenne !!!!!!

Je trouve que les narration de recherche c'est pratique ça nous force à chercher et à écrire tout les chemins que l'on a pris pour arriver au résultat qu'il soit vrai ou faux

C'est bien mais je préfère avoir des exercices s'il vous plaît. Merci infiniment. parce que ça prend trop de temps et y a des questions pour expliquer comment on a fait ete... exercices y a rien de ça.

Je trouve que les narrations de recherche sont bien car on voit comment on raisonne.

Je pense que une narration de recherche, c'est fait pour bien réfléchir, développer notre logique et mettre nos nerfs à rude épreuve !

Je pense que les narations de recherche sont bien car elles permettent de perfectionner les metodes de maths. Et en plus cela fait reflechir.

SOMMAIRE

Préface 5

Remerciements 8

Introduction 9

Qu'entendons-nous par narration de recherche ? 10

Où, quand, comment sont nées les narrations de recherche ? 10

Chapitre 1 - De la narration de recherche comme objet d'étude 13

1. *Une activité narration de recherche dans la classe : Pourquoi ?* 14
2. *La narration de recherche et les pratiques pédagogiques comparables* 18
3. *La narration de recherche et l'accès aux démarches de pensée des élèves* 21

Chapitre 2 - Modalités de mise en œuvre 23

1. *Les problèmes et leurs énoncés* 25
2. *La présentation du nouveau contrat aux élèves* 26
3. *La correction et l'évaluation des copies* 27
4. *Le compte rendu en classe* 29

Chapitre 3 - Exemples de narrations de recherche 31

1. *Gros dédé sur une balance* 33
2. *Le chiffre des unités de* 13^{2000} 45
3. *Si on doublait l'aire* 54
4. *Points et segments* 63
5. *Centre de gravité* 76
6. *Cinq, quatre, trois, deux, un* 89
7. *Points sur les faces d'un cube* 108
8. *Énoncés divers* 119

Chapitre 4 - Incidences sur les pratiques, réinvestissements, prolongements ***129***

1. Les narrations de recherche à l'école primaire ***132***

2. Narrations de recherche au cycle central du collège ***136***

3. Les narrations de recherche et les problèmes fermés au cycle central ***142***

4. Travail réflexif de groupe au collège ***147***

5. Analyse du travail de groupe au lycée ***153***

Conclusion ***163***

Bibliographie ***165***

Publications récentes des animateurs de l'IREM Montpellier ***168***

Brochure en vente :

- À L'IREM de Montpellier : adresse au dos de la brochure
- À l'APMEP à son siège National : cf au dos de la brochure

ou dans les régionales APMEP

PRÉFACE

*N*arrer les mathématiques, quelle idée ? Cette question renvoie à une question beaucoup plus profonde : faire des mathématiques, c'est quoi ? Surgissent alors des représentations profondément établies : savoir manipuler correctement un certain nombre d'algorithmes et de théorèmes. Vient alors une interrogation essentielle : est-ce que j'ai le droit ? À cela s'ajoute l'idée de la bonne solution, de la bonne rédaction, celle qui est à la fois élégante et concise, celle qui utilise les outils experts, celle dont l'objectif est une communication restreinte à un petit nombre d'initiés, qui se limite souvent au professeur dans le cadre de l'enseignement. Voilà le contrat ancré dans la tête de beaucoup d'élèves, et le souvenir qu'ont gardé beaucoup d'adultes de leur scolarité.

*A*insi faire des mathématiques pose la question de ce qu'est l'activité mathématique, les enseigner pose celle du regard sur cette activité dans la classe ? Les travaux d'enseignants passionnés, que ce soit dans leurs établissements, ou dans des réseaux comme ceux des IREM et de l'APMEP, ont permis d'avancer considérablement sur cette question. Tous vont dans le sens que l'activité mathématique première est la résolution de problème, la replaçant ainsi dans une perspective historique.

*R*ésoudre des problèmes, voilà une activité intellectuelle bien complexe. C'est d'abord l'apprentissage de la confrontation au non savoir. C'est aussi l'acquisition d'une « langue » et d'une « grammaire » spécifiques. Cette langue est à la fois universelle et profondément liée à notre culture : elle s'appuie sur notre langue naturelle, tout en l'utilisant de façon spécifique parfois contradictoire avec le sens premier ; elle crée des nouveaux mots. Quant à la « grammaire », c'est la démarche mathématique, qui se construit chez l'élève en développant un comportement d'expert transférable dans d'autres activités que les mathématiques. C'est enfin la communication à une communauté scientifique, la classe dans l'enseignement, qui ne saurait se limiter au seul professeur.

*R*ésoudre des problèmes, mais des « vrais » ! Comment se caractérisent-ils ? Leur énoncé est simple, souvent court, compréhensible par des élèves de l'école élémentaire pour un certain nombre ; ils vont résister, contraindre la pensée à se surpasser. Mais quelle plus belle récompense que de partager l'émotion d'un élève qui, par la seule force de sa pensée, vient de franchir une étape décisive dans la résolution d'un tel problème.

*A*lors, pourquoi perdre ce temps si important de la recherche de l'élève ? Pourquoi ne pas valoriser cette activité qui est l'essence même des mathématiques ? Voilà le défi que depuis plus de dix ans relève l'équipe qui a produit cette brochure. On y retrouve un florilège de « vrais » problèmes. On y partage les cheminements de nombreux élèves placés en activité mathématique, leurs errements dans une démarche expérimentale, leurs avancées vers des pistes de solution, la construction

de leur raisonnement, leur passage vers un degré d'expertise de plus en plus grand au fil des classes, la désolation lorsque « ça ne passe pas » ou au contraire l'émotion lorsqu'une solution apparaît, la joie de la certitude quand ils ont réussi à la valider.

*T*rouver la solution, c'est tant mieux ! Mais persuader l'élève qu'il n'a pas perdu son temps si la recherche n'a pas abouti, voilà tout l'enjeu du contrat qui est passé avec lui. Et je crois que la force du dispositif « Narration de recherche » tient à la qualité de ce contrat : sincérité et confiance sont indispensables pour que se mette en place une nouvelle relation enseignant-enseigné. Cette confiance et cette sincérité transparaissent dans tous ces textes : relation profondément affective entre l'élève, les mathématiques et l'enseignant. Je n'emploie pas ici le terme affectif pour parler d'un bonheur béat, mais de tout ce qui fait la force d'une vraie relation, mêlant joie et douleur, doute et certitude, rapprochement et éloignement. L'enseignant a ici un rôle essentiel, se gardant de tout jugement, respectant l'intimité des écrits, valorisant les avancées même les plus ténues. La familiarisation est une condition toute aussi importante. Nous vivons dans une société où les valeurs dominantes sont basées sur le « rapide » et le « volatile », alors que les mathématiques se caractérisent plutôt avec les adjectifs « lent » et « durable ». Il n'est pas possible de mettre en place ce dispositif de « narration de recherche » à l'occasion d'un seul « problème ouvert » dans l'année, car c'est dans le temps que l'élève se l'appropriera, jusqu'à devenir une démarche opérationnelle dans le quotidien des « problèmes fermés » comme nous le montrent les auteurs.

*I*l ne me viendrait pas à l'esprit dans cette préface de paraphraser ce que les auteurs exposent sur l'intérêt de ce dispositif, ses caractéristiques, les modalités de sa mise en œuvre. Tout cela est le fruit de leur longue expérience, et résumer leur réflexion serait inutilement réducteur. Mais je vous invite à me suivre jusqu'au premier exemple de narration de recherche qu'ils proposent : « Gros Dédé sur une balance ». Voilà un problème proposé du cours moyen de l'école élémentaire à la quatrième de collège. Dépassons le côté humoristique de la situation et regardons toutes les informations que nous apportent ces textes élèves, la réalité des connaissances disponibles suivant le niveau, les conceptions partielles ou erronées qu'elle met en lumière, l'avancée des élèves vers des solutions de plus en plus expertes au fil de la scolarité. On y retrouve une première idée essentielle à mon sens : les mathématiques ne peuvent s'exercer sur la « réalité », mais uniquement sur une « réalité abstraite », comme nous le montrent tous ces premiers textes « scotchés » à la photo. Abstraire ne suffit pas, il faut alors « mathématiser » : les textes suivants illustrent cela, en mettant en évidence le phénomène « âge du capitaine » ; pour ces élèves, résoudre un problème, c'est faire des opérations. Mais j'ai été stupéfait par l'ingéniosité de Laïla et Julien en CM2, l'une « s'autorisant » à formuler des conjectures sur la solution pour les modifier en fonction des contraintes, l'autre travaillant sur l'écart, et par là même sur les nombres relatifs. Quant au travail de Clémentine en 4ème, il est remarquable : elle met en place une « littéralisation » du problème, et fonde la règle de résolution d'un système de 3 équations à 3 inconnues par substitution !

*O*n peut lire cette brochure de beaucoup de façons. Pour ma part, j'ai commencé par une lecture linéaire, avec un regard « didactique » dans les deux

premiers chapitres, puis comme un roman lorsque sont arrivés les élèves dans le chapitre 3. Après le chapitre 4 je suis revenu sur les premières pages, et j'ai mesuré toute la pertinence de l'analyse qu'elles proposaient. Et j'ai compris que ce que nous proposaient les auteurs, de façon structurée, c'était la narration de leur groupe de recherche !

N'oubliez pas que le message essentiel de cette brochure est que l'activité mathématique est fondamentalement la résolution de problèmes. Ne vous contentez pas de la lire comme un discours sur un dispositif valorisant cette activité dans l'enseignement. Lancez-- vous aussi pleinement dans la résolution des problèmes que vous ne connaissez pas, en utilisant papier et crayon, règle et compas, calculatrice et ordinateur. C'est ce que j'ai fait avec le problème 6 que j'ai découvert ici : « cinq, quatre, trois, deux, un ». J'ai commencé par « sécher », puis j'ai réussi à aller jusqu'à deux ! J'ai alors « triché » en allant voir la solution « un » (en me donnant comme bonne raison que je n'avais plus le temps de chercher). L'analyse « experte » est que les premières solutions utilisent la géométrie « euclidienne » en ne travaillant qu'avec deux points (utilisation de réflexion conservant les longueurs) ; pour arriver à « deux », c'est la géométrie « affine » qui travaille avec trois points (Thalès et/ou homothétie) ; pour trouver « un », on touche à la géométrie « projective » en utilisant quatre points (quadrilatère complet). On n'est finalement à l'aise que dans ce qu'on pratique régulièrement, sinon on est comme nos élèves ! Et une caractéristique forte de ces narrations de recherche, c'est qu'elles peuvent développer une attitude fondamentale dans l'acquisition des mathématiques : « Apprendre à sécher ! »

Jean-Claude Duperret

Professeur à l'IUFM de Reims,
Animateur à l'IREM de Reims,
Membre de la Commission de Réflexion
sur l'Enseignement des Mathématiques

REMERCIEMENTS

Dans le cadre du développement de son partenariat éditorial avec les IREM, l'APMEP est heureuse de publier la présente brochure, due à l'Irem de Montpellier.

Il s'agit d'un ouvrage *fondamental* et de *référence* qui décrit excellemment une pratique novatrice capable de concourir au plus haut point à la formation scientifique chère à l'APMEP : apprendre à expérimenter, à prendre des exemples, à essayer, si besoin est à repartir sur d'autres pistes, à conjecturer, à bâtir une démonstration, ..., à s'auto-contrôler et à communiquer. Capable également d'intéresser et de passionner les élèves et de développer en eux aussi bien le sens et le goût de l'effort personnel que le souci de les situer dans une recherche collective.

Au nom de l'A.P.M.E.P. je remercie chaleureusement l'équipe des auteurs : ils ont su innover puis développer leur innovation sur une grande échelle avec le sceau d'un traitement scientifique. Tout cela est sans égal ailleurs. *De ce fait la brochure doit faciliter et épauler grandement une extension, que l'APMEP appelle de ses vœux, de la pratique des narrations de recherche (de l'école élémentaire à l'Université !)*

Je remercie aussi chaleureusement l'IREM de Montpellier pour la confiance qu'il nous a témoignée en nous acceptant comme co-éditeur.

Henri BAREIL

Responsable des publications APMEP

INTRODUCTION

Après avoir réfléchi, je me suis arrêté là pour mercredi, j'avais un problème, je n'avais plus de piste valable à suivre, j'étais dans l'impasse.

J'ai donc passé mes temps libres, comme le bus, ou les trajets à pied, à essayer de trouver une méthode valable qui pourrait me permettre de tracer moins d'arcs de cercles....

Renaud, 2nde

QU'ENTENDONS-NOUS PAR NARRATION DE RECHERCHE ?

Nous pouvons reprendre la définition donnée en 1994 par Luis PAÏS[1] :

Une narration de recherche est l'exposé détaillé, écrit par l'élève lui-même, de la suite des activités qu'il met en œuvre lors de la recherche des solutions d'un problème de mathématique.

OÙ, QUAND, COMMENT SONT NÉES LES NARRATIONS DE RECHERCHE ?

Cette pratique est apparue à l'IREM de Montpellier, au sein du Groupe Géométrie dirigé par Gérard Audibert, à la fin des années quatre-vingt.

Créée en 1977, cette équipe de recherche constituée d'une dizaine de professeurs de mathématiques de collège et de lycée, procédait à des expérimentations et pratiquait des observations d'élèves en situation de recherche d'un problème de type "Problème ouvert"[2]. Contrairement à la pratique de l'IREM de Lyon, la recherche n'était pas une recherche de groupe mais uniquement une recherche individuelle : chaque expérimentateur observait un seul élève.

La séance de recherche durait une heure : l'expérimentateur assis à côté de l'élève, lui demandait de donner le maximum d'explications, de penser tout haut, de ne pas effacer mais de raturer ou de changer de feuille ; un magnétophone permettait de faciliter la prise de notes.

Les expérimentateurs étaient très troublés par les différences importantes de comportement et de réussite entre les élèves qu'ils observaient et leurs propres élèves..., au bénéfice des premiers. Or, le choix des élèves observés était volontairement représentatif de tous les niveaux scolaires. Comment donc expliquer la surprenante capacité de recherche, l'ingéniosité des méthodes utilisées...sinon par le très vif intérêt que manifestait l'expérimentateur pour tout ce que l'élève observé faisait, pensait, disait... ?

De redoutables questions se posaient alors aux expérimentateurs pour leur propre pratique en classe :

- Comment motiver leurs élèves ?

---

[1] PAÏS L.C. ; Représentation des corps ronds dans l'enseignement de la géométrie au Collège.

[2] ARSAC G., GERMAIN G, MANTE M. ; Problème ouvert et situation problème.

- Comment avoir accès à cette phase de recherche qui pouvait être si riche et qui leur échappait ?
- Comment pratiquer une observation individuelle de chacun d'eux ?

Et c'est ainsi que, peu à peu, les professeurs du Groupe Géométrie en sont venus à demander à leurs élèves de ne pas se contenter de la rédaction de la solution d'un problème mais de raconter toutes les étapes de leur recherche, de façon chronologique, avec le plus de précision possible.

C'est à Bruxelles, en Juillet 1989, lors de la 41ème Rencontre internationale de la CIEAEM[3] que Gérard Audibert, alors vice-président de la Commission, invitait Arlette Chevalier, membre du Groupe Géométrie, à venir présenter ce nouveau type d'exercice, baptisé pour la circonstance "Narration de recherche".

Depuis lors, cette pratique a été régulièrement utilisée par de nombreux professeurs dans des classes de collège, de lycée, parfois même au cours moyen à l'école élémentaire et dans l'enseignement supérieur.

Les narrations de recherche ont fait l'objet de publications, de thèses, de mémoires d'étudiants en IUFM, de présentations lors de colloques de Mathématiques et .... de Français[4].

---

[3] CIEAEM : Commission Internationale pour l'Étude et l'Amélioration de l'Enseignement des Mathématiques.

[4] Journées d'études scientifiques. 1 et 2 Avril 1999. PERPIGNAN. Parler et écrire pour penser, apprendre et se construire.

l'APMEP c'est ...

sur la base du bénévolat intégral : un **Comité** et un **Bureau National, des Commissions Nationales** par niveau et par thèmes

organes de liaison avec les autorités pédagogiques et administratives de la Région (IREM, IUFM, IPR, ...) relais essentiels entre le National et les adhérents, avec parfois leurs propres bulletins

temps fort de l'Association, sur 3 ou 4 jours, déplaçant près de 1000 enseignants de mathématiques. Organisées, chaque année, en des lieux et sur des thèmes différents, avec des conférenciers, des ateliers, des débats, ...

26 rue Duméril - 75013 PARIS
Courriel : apmep@apmep.asso.fr

http://www.apmep.asso.fr

Bulletin à Grande Vitesse pour cerner rapidement l'actualité mathématique et associative

Base d'exercices sur disquettes, en collaboration avec le CNDP

Evaluation par l'APMEP de l'impact des programmes

Classeur de documents informatisés pour le Lycée

sur les positions de l'APMEP, les brochures, ... , disponible - franco de port - sur simple demande.

par niveau d'enseignement et par secteur
Avec réduction de 30% aux adhérents.
Co-éditions et co-diffusions à prix réduits d'autres ouvrages

selon les besoins, et sur projets, comme : jeux
Prospective-Bac
Problématiques Lycée
Réflexion sur les programmes de Collège ...

avec :
-des **articles de fond**
-d'autres **"dans nos classes"**
- des **problèmes**
-une **riche documentation**
- un **dossier** par numéro

Revue tournée préférentiellement vers les "débutants". 4 numéros par an (160 pages environ)

Banque bibliographique de données sur INTERNET en coopération avec les IREM

Chapitre 1

DE LA NARRATION DE RECHERCHE COMME OBJET D'ÉTUDE

Je dois avouer que ce n'est pas très clair. C'est sans doute la première fois que je trouve la solution à un devoir de maths en "bidouillant" et c'est décevant de constater qu'il est impossible d'expliquer quelque chose d'incompris.

Marlène 1ère L

1. UNE ACTIVITÉ NARRATION DE RECHERCHE DANS LA CLASSE : POURQUOI ?

La narration de recherche s'appuie sur un modèle constructiviste de l'enseignement. Pour apprendre, l'élève doit se poser des questions, oser prendre des initiatives, manifester ses doutes. L'intuition, l'imagination sont des ingrédients indispensables à toute activité mathématique[5] et l'enseignement doit encourager les élèves à s'engager dans ces postures d'élève chercheur, d'élève interrogateur.

Ces attitudes peuvent redonner à l'enseignant son véritable rôle de personne ressource lorsqu'il est sollicité par l'élève qui termine sa narration de recherche par ces mots :

Je me suis posé beaucoup de questions, j'ai essayé beaucoup de pistes, mais je n'y arrive pas, j'attends la correction en classe

Nous allons développer nos hypothèses d'enseignement en dégageant quatre points essentiels qui peuvent être les réponses à la question : pourquoi faisons-nous des narrations de recherche ? Nous désirons :

- proposer une activité mathématique véritable ;
- manifester un réel intérêt pour la singularité de chaque élève ;
- provoquer une attitude réflexive chez eux ;
- investir et réinvestir à long terme.

1.1. LA NARRATION DE RECHERCHE EST UNE ACTIVITÉ MATHÉMATIQUE VÉRITABLE

Une telle activité peut être définie en citant Lubczanski[6] comme "un travail autonome visant à résoudre un problème, c'est-à-dire une question dont on ne connaît pas la réponse mais dont on saisit tout de suite le sens". Pour cela, des savoirs et des savoir-faire sont sollicités, des stratégies imaginées, des méthodes expérimentées. Mais comment favoriser cette véritable activité mathématique ?

L'écriture en langage naturel facilite la recherche.

La narration de recherche autorise l'élève à écrire en langage naturel, de ce fait l'expression rigoureuse habituellement demandée ne fait plus obstacle. À ce titre, cet écrit peut apparaître comme le brouillon de la pensée, alors qu'il est le brouillon de la forme. Il suffit d'ailleurs d'entendre une discussion d'élèves en situation de

---

[5] FRIEDELMEYER J. ; L'indispensable histoire des mathématiques.

[6] LUBCZANSKI J. ; Chercher en classe ; Sans Tambour Ni Trompette N°6.

recherche commune pour constater que le flou du langage n'est pas celui des idées. Le besoin de reformuler un énoncé, pour se l'approprier et lui donner du sens montre bien que la pensée évolue d'une façon brute, avant sa forme officielle.

L'élève comprend mieux ce qu'est l'activité mathématique.

En effet, il a trop souvent l'impression que la solution d'un problème, rigide, donnée par le professeur avec un discours linéaire, est un bloc auquel on n'a accès que par une toute petite porte. La narration de recherche éclaire au mieux le chemin, avec ses détours et ses impasses, vers un but dont rien ne dit à l'avance qu'on y va droit.

La phase heuristique du travail est valorisée[7].

Habituellement, lors de la résolution d'un problème, l'élève se trouve confronté à deux tâches successives distinctes : la recherche proprement dite (phase heuristique) et la rédaction des solutions (phase rédactionnelle qui est la mise en forme définitive, souvent une démonstration). En général, seule la deuxième phase fait l'objet d'un travail écrit, la première n'en étant que le ou les brouillons. La narration de recherche valorise cette phase heuristique du travail et permet à tout élève de faire état de ses réflexions, de ses doutes, de ses essais, de ses erreurs ; même s'il ne parvient pas à la solution, il apporte ainsi la preuve de son travail.

L'attitude scientifique - expérimenter, conjecturer, prouver - est développée.

La démonstration formelle étant un objectif second, c'est la recherche qui est privilégiée, à savoir : à partir de quelques exemples, émettre des conjectures, les tester, puis les infirmer ou les prouver. Les exemples eux-mêmes peuvent faire appel à une modélisation et, là encore, on rencontre une démarche scientifique : pertinence du modèle, et outil mathématique qu'il va induire. La capacité d'anticipation, lors de l'émission d'une conjecture est également sollicitée.

1.2. La narration de recherche permet de manifester un réel intérêt pour la singularité de chaque élève

L'élève parle à la première personne : "Je pense que..., j'essaie..., je crois que...".

Dans les devoirs habituels, le discours est sans sujet et se déroule (même si c'est lui qui l'a écrit) à distance de l'élève puisqu'il est formellement objectivé. Dans une narration de recherche un dialogue personnel s'instaure, dans un sens, entre l'élève qui écrit et le professeur qui va le lire, et, en retour, par les annotations individualisées sur la copie. Les différentes stratégies (différentes d'un élève à l'autre, ou de celles du professeur), justes ou fausses, sont valorisées et la prise en

---

[7] HOUDEBINE Jean ; Démontrer ou ne pas démontrer, voilà la question.

compte de chaque subjectivité démocratise le rapport aux mathématiques : même les élèves faibles y trouvent leur compte.

Le droit à l'erreur est reconnu et intangible.

De la même façon que personne n'a appris à monter à vélo sans tomber, on ne peut faire des mathématiques sans se tromper, que ce soit une erreur d'appréciation, de jugement, ou une impasse dans un raisonnement. Ainsi la réflexion est plus sereine et il n'y a pas le stress du "juste ou nul". La phase heuristique est prise en compte sans obligation de résultat.

L'absence de formalisme fait apparaître la narration de recherche comme un espace de liberté.

Le travail est perçu d'une façon plus ludique (voir devinettes, jeux de logique, ...) que les activités mathématiques traditionnelles. Ainsi peut se révéler le désir de faire des mathématiques et ce, quel que soit le niveau des élèves ; il faut néanmoins reconnaître que certains, ici aussi quel que soit leur niveau, restent hermétiques à cette activité. Une grande ingéniosité dans les stratégies mises en œuvre, une remarquable lucidité sur les démarches de pensée et le plaisir avoué de la recherche, même si elle est énervante, attestent d'une motivation accrue et d'une curiosité piquée.

1.3. La narration de recherche provoque une attitude réflexive

L'écriture chronologique, et non synthétique du travail de recherche, oblige l'élève, pas à pas, à penser sa propre pensée et à être observateur de lui-même. L'écrit objectivise la pensée, et la mettant ainsi à distance, permet de mieux la structurer. Le fait de formuler une idée, même en langage naturel, l'éclaire, et cet éclairement peut amener à la confirmer ou à l'infirmer.

L'explicitation d'une idée fausse ou d'une erreur, plutôt que son rejet immédiat, peut permettre de la répertorier ; sa reconnaissance ultérieure permettra de l'éviter.

Le plaisir de la recherche laissant peut-être plus de traces, il en est de même pour les bonnes idées dont on peut constater qu'elles sont plus facilement réinvesties. De même pour les connaissances dont, le recul aidant, la structure peut paraître plus limpide ou adaptable.

Le temps de la recherche est très variable selon les élèves. En analysant la pertinence des stratégies mises en œuvre, on peut le faire apparaître comme un élément à part entière de la recherche, et ainsi mieux le gérer.

La narration de recherche comporte deux volets qu'il faut bien distinguer :

- la narration proprement dite de la recherche, chronologique, avec ses erreurs et hésitations, ses impasses et raccourcis ;
- la synthèse qui demande à l'élève de penser sa démarche, et de la structurer, en tant qu'outil pour résoudre le problème.

Le premier volet est personnel, l'élève cherche pour lui, dans une bulle, en circuit fermé. Le second, au contraire, fait appel à autrui, et l'élève doit y argumenter, communiquer ses convictions. C'est là un apprentissage de la démonstration[8].

1.4. La narration de recherche permet de (ré)investir à long terme

Si la plupart des travaux proposés aux élèves dans le cadre de l'enseignement des mathématiques ont pour objectif de contrôler l'acquisition récente des connaissances et leur mise en œuvre, d'autres peuvent servir d'introduction à la présentation de notions nouvelles ; et d'autres encore consistent en des problèmes dont la résolution n'est pas directement liée aux derniers cours, mais va chercher des outils dans tout le passé mathématique de l'élève. Ces deux derniers types d'activité sont le lieu privilégié des narrations de recherche : ce sont plutôt des attitudes que des connaissances qu'il s'agit de faire acquérir aux élèves et par là même de changer, pas à pas, leur regard sur les mathématiques.

Cette évolution de la vision des mathématiques, de partielle à globale, doit permettre l'émergence des règles du débat mathématique : une démonstration ne peut pas être truquée, elle emporte l'adhésion.

Ce recul de l'horizon doit aussi permettre l'amélioration du langage mathématique et contribuer à sa maîtrise : les objets rencontrés, même là où on les attend le moins, ne changent jamais, sont partout et toujours les mêmes, et deviennent des universaux.

S'il est vrai que certains élèves restent réticents à l'activité narration de recherche, la plupart (même les plus faibles), font ce travail avec plaisir, voire enthousiasme. Curiosité et motivation se passent le relais, et quoi de plus gratifiant pour un enseignant qu'un élève demandeur de savoir : "j'ai cherché, maintenant donnez-moi la réponse".

La socialisation des idées et stratégies mises en œuvre au cours de la résolution d'un problème, à l'occasion des commentaires sur les différentes narrations de recherche amplifie encore cette distanciation. Et, à propos de distance, une métaphore routière des étapes d'un raisonnement mathématique convient parfaitement : sur la carte, on voit un réseau plus ou moins dense, plus ou moins direct, plus ou moins tortueux.

---

[8] On peut reconnaître ici les deux pratiques d'écriture différenciées par R. DUVAL dans *"Écriture, raisonnement et découverte de la démonstration en mathématiques"*. Le premier volet, récit de l'émergence d'un raisonnement, relève du "transcrire" ; la synthèse du deuxième volet oblige à une attitude réflexive, une mise à distance, et c'est bien "écrire" dont il s'agit.

2. LA NARRATION DE RECHERCHE ET LES PRATIQUES PÉDAGOGIQUES COMPARABLES : PROBLÈMES - OUVERTS, SITUATIONS - PROBLÈMES ET DÉBATS SCIENTIFIQUES

Qu'il s'agisse de problèmes ouverts, de situations-problèmes, de débats scientifiques ou de narrations de recherche, ces pratiques pédagogiques ont un but commun, celui de placer l'élève dans la situation la plus typique de l'activité mathématique, c'est-à-dire affronter un problème, se trouver dans la position d'un chercheur en mathématique. Elles se situent dans le modèle constructiviste de l'enseignement élaboré suite à des travaux de psychologues en particulier J Piaget, d'épistémologues comme G. Bachelard et de didacticiens comme G. Brousseau, Y. Chevalard et G. Vergnaud.

Au départ, ces pratiques qui reposent sur la résolution de problèmes proposent des énoncés aux caractéristiques sensiblement identiques, ils sont faciles à comprendre, leur réponse n'est pas évidente mais elle se situe dans un champ de connaissances où l'élève peut facilement engager des procédures de réponses partielles. Un nouveau contrat didactique est établi entre les élèves et l'enseignant, et l'organisation d'une nouvelle gestion de la classe est mise en œuvre.

Mais quelles sont alors les différences entre ces quatre pratiques ?

Les situations - problèmes[9] visent la construction de savoirs et de concepts contenus dans les programmes. Elles amènent les élèves à découvrir de nouvelles notions dans un cadre où elles puissent leur apparaître comme un outil nécessaire. L'un des objectifs d'une situation - problème est de permettre aux élèves de construire de nouvelles connaissances. La recherche se fait en classe, elle est individuelle dans un premier temps, puis les élèves confrontent leurs résultats et leurs méthodes, ils prennent alors conscience que leurs conceptions sont insuffisantes ou erronées et enfin ils élaborent avec l'enseignant une nouvelle connaissance qui sera institutionnalisée.

La pratique du problème ouvert[10], développée par l'IREM de Lyon, a pour objectif de permettre aux élèves de s'engager dans une démarche scientifique, c'est-à-dire essayer, conjecturer, tester, prouver. L'accent est mis cette fois-ci, non sur l'acquisition de nouvelles connaissances, mais sur l'activité de résolution elle-même. Une attention particulière est portée sur la gestion de la classe et le rôle de l'enseignant lors d'une séance de recherche de problème ouvert.

La recherche se fait en classe pour deux raisons : elle permet au professeur d'observer les capacités de recherche de ses élèves et surtout il est demandé aux élèves de travailler en groupe.

---

[9] M. MANTE, R. DOUADY, R. CHARNAY ; Suivi scientifique, nouveaux programmes de sixième 1985-1986.

[10] ARSAC G., GERMAIN G, MANTE M. ; Problème ouvert et situation problème.

Cette idée de travailler par groupe est essentielle dans cette pratique car un de ses objectifs est que l'enseignant tout en étant le garant des connaissances devienne un simple animateur de la recherche. La séance est donc organisée de la manière suivante : travail par groupe de quatre élèves, échange d'arguments sans intervention de l'enseignant, puis formulation des solutions de chaque groupe sous différentes formes (exposés, affiches) et enfin débat dans la classe pour confronter les différentes propositions des groupes. Le débat doit être ressenti dans la classe comme une nécessité et non un exercice imposé par le professeur ; une finalité de cette pratique est que les élèves se sentent investis de la responsabilité de la recherche des solutions puis de la vérification de son exactitude. L'enseignant doit être l'organisateur de la recherche ; et tout en restant le garant des formulations et du temps, il est le médiateur indispensable qui orchestre les débats et veille à la validité mathématique des arguments avancés par les élèves.

Le débat scientifique[11] est une situation d'enseignement très semblable aux précédentes ; à partir d'énoncés conjecturaux, c'est-à-dire d'énoncés jugés vrais par celui qui les propose mais qui n'ont pour la classe aucun caractère de vérité institutionnelle, un nouveau contrat didactique s'établit entre le professeur et les élèves. Un débat oral est organisé, où les élèves sont mis en confiance pour soumettre à leurs pairs leurs conjectures, sans la médiation du professeur. Il faut remarquer que cette sincérité et cet engagement demandent la reconnaissance d'un véritable statut scientifique à l'erreur dans les phases de recherche. Le professeur doit assurer un contrôle épistémologique du débat, le réguler en ralentissant quelquefois la vitesse des échanges, tout en constituant une mémoire des idées fortes.

La narration de recherche n'a pas comme objectif l'acquisition de nouvelles connaissances, comme "les problèmes ouverts", elle vise à engager les élèves dans une démarche scientifique mais, alors que les échanges entre pairs sont privilégiés dans les autres pratiques citées, ici la recherche est individuelle, elle se concrétise par un écrit qui établit une relation particulière entre l'enseignant et l'élève. Une caractéristique forte par rapport aux autres pratiques, est cet engagement personnel, ces écrits sont presque privés, l'élève se regarde chercher et seul l'enseignant est invité à partager ses réflexions. De plus, la narration de recherche est en général donnée à faire à la maison, le temps et les moyens de recherche ne sont donc pas limités comme dans les pratiques précédentes.

Nous pouvons dire que ces quatre pratiques, qui relèvent d'une même conception de l'enseignement, sont complémentaires. Les narrations de recherche peuvent être le déclencheur de situations-problèmes pour l'institutionnalisation de certaines connaissances.

De la même manière il est aisé d'envisager l'organisation d'un débat scientifique lors de la séance de compte rendu de narrations de recherche, à partir des conjectures énoncées par les élèves. Cependant il ne faut pas cacher que pour que ces deux modes soient complémentaires, ils ne doivent pas être assimilés l'un à l'écrit et l'autre à l'oral. S'ils sont tous deux de type "psychanalytique" en ce sens qu'ils ont pour objet de faire monter en surface, en conscience, ce qui est refoulé, caché,

---

[11] LEGRAND M. ; Débat scientifique en cours de mathématiques.

inhibé, s'ils autorisent tous deux à s'exprimer avec ses mots à soi, ils ne doivent pas se gérer sur le même registre.

Dans le débat scientifique, le nerf de la guerre c'est ce qui est directement public, c'est-à-dire la conjecture "énoncé fermé qui dit ce qu'on pense être vrai !" et le contre-exemple "qui exhibe ce qu'on pense être faux".

Dans la narration de recherche, c'est davantage l'histoire de ces heuristiques qui est mise en avant, c'est donc un discours plus privé qui ne peut pas toujours être directement intéressant pour les pairs. De fait le professeur a pour fonction de tout entendre puis de restituer à la classe ce qu'elle peut utilement travailler collectivement, il doit gérer très consciemment et habilement cette alternance entre côté public et côté privé.

3. LA NARRATION DE RECHERCHE ET L'ACCÈS AUX DÉMARCHES DE PENSÉE DES ÉLÈVES

La connaissance des démarches de pensée et concepts utilisés par les élèves en situation de recherche est nécessaire tant au formateur qu'au chercheur qui doivent s'informer sur la manière dont l'élève a réalisé une tâche particulière. Cela peut être à des fins de soutien, de remédiation pédagogique, de perfectionnement ou plus généralement afin d'énoncer des hypothèses d'enseignement.

Les divers instruments méthodologiques d'observation couramment utilisés ont été répertoriés par G. Vergnaud[12]. Nos travaux de recherche, menés dans le groupe géométrie dirigé par G. Audibert, nous ont conduit à utiliser plus particulièrement :

- les expériences planifiées papier crayon ;
- les entretiens individuels ;
- les expériences didactiques en classe.

Nous n'allons pas débattre de leurs mérites particuliers, ni de leurs inconvénients. Nous savons par expérience que la première méthode est plus légère à mettre en œuvre que la dernière. Nous savons également que l'entretien individuel a un coût horaire important (G. Audibert[13] l'estime à une journée de travail par entretien). De plus, lorsqu'il est décalé dans le temps comme certains entretiens individuels d'explicitation, il se heurte à certaines difficultés car le sujet peut adopter des positions de parole différentes mêlant vécu et savoir comme le montre P. Vermersh[14].

Nous avons tenté de confronter la narration de recherche à certaines de ces méthodes afin de repérer les contraintes auxquelles elle doit satisfaire pour en faire un procédé reproductible offrant la possibilité de dégager des résultats fiables. Quelques résultats ont déjà été exposés par F. Bonafé, R. Brunet et B. Pelouzet[15].

Concernant l'étude des procédures, nous avons observé que la méthode est fiable puisque l'utilisation des narrations de recherche permet la mise en évidence des mêmes procédures (parfois dans les mêmes termes) que l'entretien d'explicitation ; et ceci est vrai quel que soit le mode de passation : en classe sous surveillance ou hors de la classe sans surveillance.

---

[12] VERGNAUD G. ; Recherche en didactique des mathématiques.

[13] AUDIBERT G. ; Une problématique en géométrie de l'espace.

[14] VERMERSH P. ; L'entretien d'explicitation.

[15] BONAFÉ F., BRUNET R, PELOUZET B. ; Les narrations de recherche, instrument méthodologique d'observation.

Par contre, elle ne permet pas dans tous les cas de savoir comment est apparue une procédure donnée, car les détails manquent parfois. Par ailleurs, lorsque le travail est effectué en dehors de la classe, sa fiabilité peut être mise en cause en raison d'interventions extérieures (parents, camarades, etc.). Les effets de ces deux inconvénients peuvent êtres atténués par un entraînement à la technique et un travail sous surveillance dans des conditions particulières.

Nous avons constaté qu'un entraînement préalable à la technique de narration de recherche de la part de l'élève conduit à l'obtention de documents riches. Nous entendons par là des documents détaillés, contenant la description et l'interprétation qu'il donne lui-même de la suite d'actions qu'il a réalisée pour parvenir à ses fins, ainsi que des éléments de réflexion sur ses pratiques.

La fiabilité de cette méthode peut être améliorée en faisant réaliser le travail en classe avec interdiction de communiquer. Mais il faut alors veiller à l'incidence de la limitation du temps sur le découpage recherche – narration. Il faut ménager un temps où, dégagé de la recherche et du compte rendu immédiat, l'élève peut approfondir sa rédaction.

Nous ne connaissons pas d'autres travaux sur les mérites comparés de ces diverses méthodes qui ont chacune, répétons-le, leurs avantages et inconvénients. Nous estimons que pour un moindre coût horaire que les autres méthodes et malgré ses imperfections, la narration de recherche offre aux formateurs et aux chercheurs un bon instrument d'observation des démarches de pensée et concepts utilisés par les élèves en situation de recherche d'un problème. C'est pour cela, sans doute, que cette méthode est utilisée par des équipes de recherche en didactique, notamment celle de l'IREM de Montpellier[16].

---

[16] BRONNER A. , PELLEQUER S .; Fonctions de l'écrit dans la classe de mathématiques.

Chapitre 2

MODALITÉS DE MISE EN ŒUVRE

Et je me disais "peut-être que j'arriverai à le lui remplir son tableau, mais qu'est-ce que je vais lui raconter sur ma feuille !?"... Mais figurez-vous que ce n'est pas 108 qui m'a posé le plus de problème, c'est n ! Ce petit nombre à un seul chiffre, que je n'ai même pas réussi à représenter sur ma feuille.

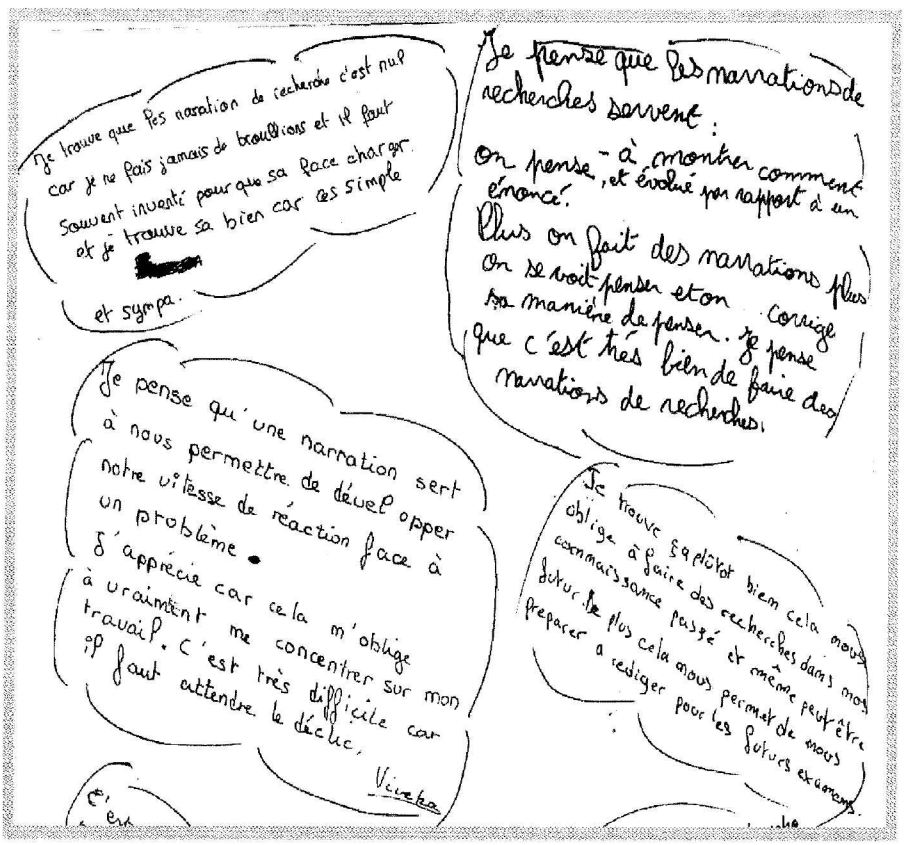
Guilhem 2nde

La narration de recherche est une activité proposée régulièrement tout au long de l'année. Elle peut être proposée en classe ou à la maison. Cette activité s'accompagne d'un nouveau contrat didactique et demande une phase d'apprentissage. Ce n'est qu'après deux ou trois devoirs de ce type que leur rédaction devient vraiment satisfaisante.

La mise en place de cette activité repose essentiellement sur :

- le choix des problèmes et de leurs énoncés ;
- la présentation du nouveau contrat aux élèves ;
- la correction et l'évaluation des copies ;
- le compte rendu en classe.

Une étude successive de chaque point va être proposée. On notera dans chacun d'eux l'aspect évolutif de l'activité.



1. LES PROBLÈMES ET LEURS ÉNONCÉS

Le choix des problèmes et la rédaction des premiers énoncés jouent un rôle déterminant. L'énoncé doit piquer la curiosité de l'élève et motiver sa recherche. On constate très rapidement que le choix des problèmes n'a d'importance que pour les premières narrations, durant la période où s'installe cette activité. Par la suite, cette condition n'est plus nécessaire.

- L'énoncé est assez bref, exprimé simplement pour être très accessible aux élèves.
- La solution n'est pas évidente et elle n'est surtout pas donnée par l'énoncé.
- L'énoncé n'induit pas la méthode de résolution, l'élève n'est pas guidé dans sa recherche, les problèmes qui amènent à la solution par une série de questions intermédiaires sont éliminés.
- Tout élève peut démarrer sa recherche par tâtonnement, par des dessins, par des essais numériques et tester ou vérifier ses résultats.
- Le problème se situe dans un champ de connaissances où l'élève peut prouver la validité de ses conjectures. Ce champ n'est pas obligatoirement en adéquation avec la progression retenue pour l'approche des divers contenus du programme.
- Les problèmes où la solution est accessible par plusieurs modes de raisonnement (algébrique, géométrique,..) sont particulièrement intéressants.

2. LA PRÉSENTATION DU NOUVEAU CONTRAT AUX ÉLÈVES

En début d'année, lors de la mise en route du premier devoir, il est important d'insister sur le nouveau type d'activité qui leur est proposée. Il s'agit d'un changement radical dans leurs habitudes et surtout dans leur comportement lors de la rédaction du devoir. De la même manière, les élèves doivent sentir que le professeur appréciera leurs copies avec un état d'esprit très différent des autres corrections.

La première narration de recherche est présentée par des consignes orales qui prennent la forme suivante :

Je vous demande de ne pas vous contenter de me donner la réponse mais de me raconter en détail tout ce que vous avez fait pour la trouver ou pour essayer de la trouver.
Vous me décrirez vos essais, toutes les pistes que vous avez essayées même si elles n'ont pas abouti.
Toute mon attention ira sur la qualité et la persévérance de votre recherche. Je ne tiendrai pas compte de l'orthographe ou de la syntaxe. J'attacherai plus d'importance à la précision de cette narration qu'au résultat trouvé lui-même

Ces consignes orales sont étayées par une phrase écrite à la fin de l'énoncé, par exemple :

Vous raconterez sur votre feuille :

- les différentes étapes de votre recherche (vous pouvez minuter le temps, joindre vos brouillons ...).
- les observations que vous avez pu faire et qui vous ont fait progresser ou changer de méthode (il vaut mieux chercher seul mais...).
- la façon dont vous expliqueriez votre solution à un (ou une) camarade que vous devez convaincre.

L'évaluation ne portera pas sur la nature de la solution (juste, fausse, incomplète....) mais sur les trois points évoqués ci-dessus

3. LA CORRECTION ET L'ÉVALUATION DES COPIES

Il ne s'agit plus ici de mesurer une acquisition de connaissances ou un savoir-faire technique comme c'est très souvent le cas dans les devoirs classiques.

L'évaluation porte plutôt sur la persévérance, voire l'ingéniosité développée dans l'activité de recherche, que sur la validité de la solution proposée. Mais la connaissance de cette activité de recherche dépend essentiellement de la qualité du récit. C'est pourquoi, dans l'évaluation d'une narration de recherche, deux aspects sont à retenir :

- la recherche de la solution du problème ;
- la qualité de la narration, c'est-à-dire la qualité du récit que l'élève en fait.

Les critères qui suivent peuvent être évoqués oralement lors de la présentation de ce travail aux élèves.

3.1. CRITÈRES POUR UNE BONNE RECHERCHE

Concernant la motivation des élèves, nous avons vu l'importance que revêt le choix de l'énoncé. Le problème doit mettre l'élève dans une réelle situation de recherche pour que soient repérables dans le récit les qualités d'une démarche scientifique. On pourra relever : une interrogation sur l'énoncé, des essais, des vérifications, des contradictions observées, une certaine cohérence, des recherches de preuves, des éléments de critique de son propre travail.

Une interrogation sur l'énoncé.

La compréhension et l'interprétation d'un texte sont souvent des facteurs de blocage. C'est à partir de questions sur le texte lui-même (sens de certains mots, multiplicité des interprétations) que peut naître le début d'une recherche.

Des essais, vérifications, contradictions observées ou non.

Nous savons que le cheminement de toute recherche contient ces trois étapes, parfois très brèves, parfois plus longues[17]. Les vérifications et contradictions observées provoquent des prises de conscience d'erreurs et donc des retours en arrière et éventuellement des changements de stratégies.

Une certaine cohérence.

L'enchaînement des actions doit être motivé par la poursuite d'une idée, quitte à en changer si elle n'aboutit pas.

---

[17] AUDIBERT G. ; Démarches de pensée et concepts utilisés par les élèves de l'enseignement secondaire en géométrie euclidienne plane.

Des recherches de preuves.

Le raisonnement par non-contradiction est source d'avancée fréquente dans les recherches des élèves, il permet des conjectures mais ne fournit pas toujours une preuve, notamment dans les problèmes de comptage. La question de la preuve peut être évoquée ou non : c'est à l'enseignant de la provoquer. Mais, dans tous les cas, c'est par là que la narration de recherche contribue à l'apprentissage de la démonstration.

Des éléments de critique de son propre travail.

Relater une recherche, en cerner les moments importants, doit permettre une prise de distance par rapport à son propre travail : on peut observer ou non ces prises de distance dans une narration.

3.2. CRITÈRES POUR UNE BONNE NARRATION

On peut modestement, lors des premiers devoirs, se contenter du respect d'une forme imposée par un questionnement et relever dans le récit :

- les différentes étapes de la recherche ;
- les observations qui ont pu faire progresser la recherche ;
- l'explication à un camarade que l'élève doit convaincre.

On peut aussi considérer que l'élève devient écrivain, son devoir doit donc présenter toutes les qualités d'un bon récit sans toutefois que les qualités de syntaxe ou d'orthographe ne constituent un obstacle à son expression. Les éléments à souligner par le correcteur deviennent : le style d'écriture, la précision du récit, sa chronologie et sa sincérité.

Le style d'écriture.

Il n'est pas télégraphique, les phrases s'enchaînent, sont faciles à lire, les renvois aux figures sont clairs.

La précision du récit.

Les différentes idées et les différents essais sont minutieusement décrits ainsi que les changements de pistes de recherche.

La chronologie du récit.

La narration apporte des éléments sur le déroulement de la recherche, sa durée, éventuellement sa répartition durant le temps laissé pour le travail quand il s'agit d'un devoir à la maison.

La sincérité du récit.

L'élève s'implique personnellement (l'emploi du pronom "je" est fréquent dans ce cas), il fait part de ses doutes, décrit ses erreurs, mentionne une aide extérieure éventuelle, une anecdote personnelle.

C'est à ce niveau-là que la relation enseignant - élève est essentielle car la sincérité repose souvent sur une relation de confiance. Chaque correction est très individuelle et doit être un encouragement à progresser car une des sources indéniable de la motivation des élèves est la qualité de l'attention manifestée par l'enseignant pour les démarches de chacun d'eux. Le plus grand respect doit être réservé à l'originalité présentée par les pensées les plus personnelles de chacun.

4. LE COMPTE RENDU EN CLASSE

Les copies corrigées et évaluées (par une note chiffrée ou une lettre), l'enseignant va rendre compte à la classe entière des différentes recherches de chacun. Il ne s'agit en aucun cas de présenter une narration modèle, ces devoirs ont un caractère personnel qu'il faut préserver. Cela n'empêche pas de présenter et confronter les différentes stratégies, de montrer les impasses ou avancées après des erreurs, les insuffisances dans les récits. Cela n'empêche pas davantage de lire un passage avec l'accord de l'auteur.

En début d'année, ces premières séances sont d'une importance capitale, elles permettent à l'élève de mieux cerner ce que l'on attend. Il faut y consacrer un temps important, ne pas hésiter à travailler une heure autour de ce compte rendu. Les mots - clés sont : personnalisation, valorisation, motivation.

Personnalisation

Relire ou montrer certains passages particulièrement intéressants en nommant (éventuellement) les auteurs, les autres s'en inspireront sans doute lors des futurs devoirs.

Valorisation

Celle des élèves en difficulté d'abord, en ne perdant aucune occasion de citer telle procédure intéressante ou question pertinente relevée dans une de leurs copies. Leur attitude et celle des autres à leur égard peuvent en être modifiées. Valorisation aussi de la recherche personnelle, en montrant que copier ou faire réaliser la recherche par un autre rend le devoir très pauvre car il ne reste plus rien à raconter.

Motivation

Le compte rendu doit montrer qu'il existe plusieurs façons de chercher, de trouver, et que ce qui a été un obstacle pour quelques-uns a pu être décisif pour l'avancement de certains autres. Il doit citer toutes les stratégies recensées et élaborer collectivement une solution qui émane du travail de chacun.

Les séances de comptes rendus sont des moments de grande écoute, où les élèves sont curieux de connaître les différentes stratégies trouvées par leurs camarades. Un débat peut s'instaurer, terrain propice à l'apprentissage de la démonstration. Il est remarquable comme parfois certains résultats dégagés lors de narrations deviennent des référents par la suite (ils acquièrent un statut de méthode efficace ou de théorème).

De nouvelles consignes pour les narrations futures sont données, car les objectifs évoluent dans le temps. Une fois le côté narratif satisfait, l'enseignant peut être plus exigeant sur les démarches de recherche, les procédures d'argumentation ou les démonstrations.

Chapitre 3

EXEMPLES DE NARRATIONS DE RECHERCHE

"Après avoir cherché un "bon p'tit bout d'temps", je pense avoir compris pourquoi ça marchait.

En fait les triangles FDB et FGA sont deux triangles "semblables" ou "isomères" (mêmes angles, même rapport)……..

Simon 1ère S

Le lecteur trouvera dans ce chapitre sept exemples de narrations de recherche, réalisés avec des classes de primaire, de collèges ou de lycées.

Pour chacun d'eux, nous avons donné :

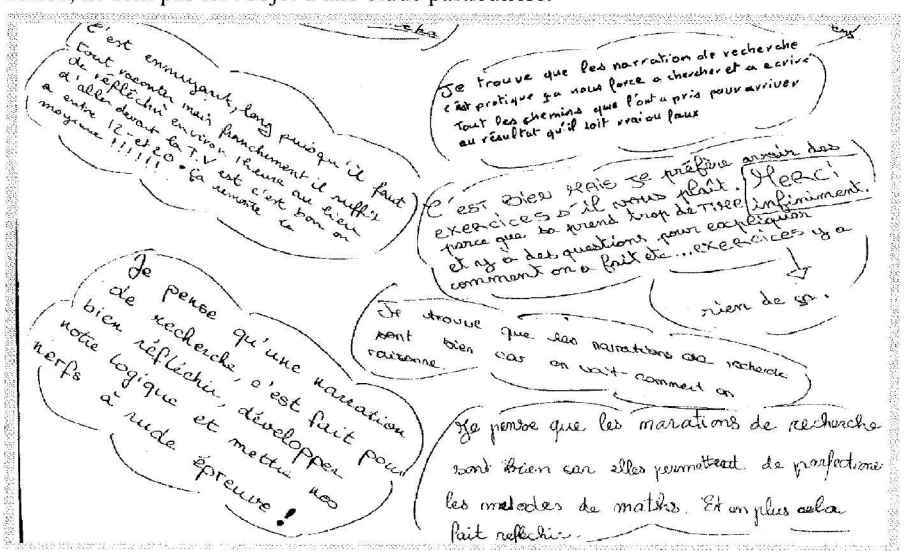
- un énoncé et quelques variantes éventuelles (dans un cadre en texte normal) ;
- les objectifs poursuivis ;
- les méthodes de recherche des élèves ;
- quelques éléments d'analyse portant sur des difficultés observées ou des traitements particuliers de certaines questions ; les extraits de copies cités à cette occasion (dans un cadre en italique) ont été fidèlement reproduits en respectant leur originalité, la syntaxe et l'organisation spatiale, "toutefois les fautes d'orthographe ont été corrigées";
- des conclusions ou prolongements ;
- une copie d'élève dans son intégralité.

Les "procédures" que nous donnons dans le paragraphe sur les méthodes de recherche des élèves sont données à titre indicatif. Elles ne sont pas le fruit d'une analyse a priori mais bien celui d'une analyse a posteriori. En particulier :

- elles constituent une synthèse dans le langage de l'observateur de démarches voisines rencontrées dans les copies des élèves ;
- on les trouve dans deux copies au moins ;
- elles peuvent concerner des démarches correctes ou erronées.

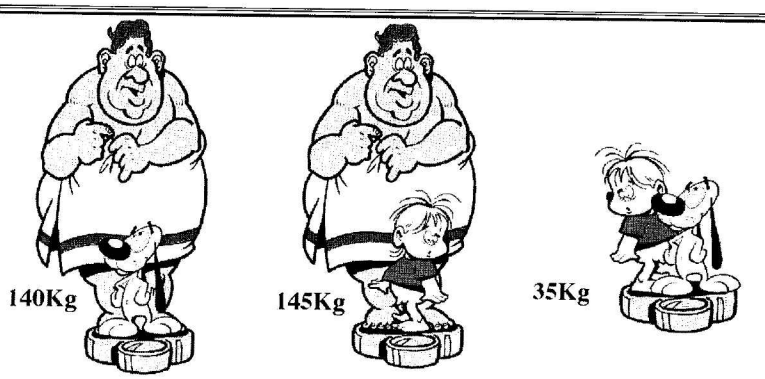
Que le lecteur qui aurait du mal à en déchiffrer certaines prenne patience, la lecture des copies de ses élèves le renverra très certainement à ces procédures.

Il trouvera également en fin de chapitre divers énoncés qui, bien que testés en classe, ne font pas ici l'objet d'une étude particulière.



1. GROS DÉDÉ SUR UNE BALANCE

1.1. ÉNONCÉ



En utilisant les informations données par ces trois dessins détermine combien pèsent le gros Dédé, le petit Francis et le chien Boudin

Cet énoncé[18] de narration de recherche a été proposé à de nombreux élèves, du cours moyen de l'école primaire à la classe de 4ème du collège.

1.2. OBJECTIFS

Proposer un énoncé sous forme figurative dans un registre différent d'un registre-texte plus habituel pour l'élève.

Analyser les stratégies d'élèves traduisant leur compétence à mettre des informations en relation.

Repérer divers types de stratégies de recherche, permettant d'identifier des stades de raisonnement différents chez les élèves.

Proposer cet énoncé de problème à différents niveaux d'apprentissage (en primaire et en collège) pour tenter de repérer d'éventuels points de rupture entre un traitement arithmétique ou algébrique.

1.3. MÉTHODES DE RECHERCHE DES ÉLÈVES

L'analyse des narrations de recherche écrites par des élèves de cycle III à l'école primaire, et des élèves de collège en 6ème, et en cycle central, permet de mettre en évidence des méthodes de recherche très différentes qui traduisent, chez les élèves, l'existence ou l'absence d'une compétence à mettre des informations en réseau (données reliées ou données juxtaposées).

---

[18] Cet énoncé est extrait de l'Encyclopédie Kangourou des Mathématiques au Collège, de A. DELÉDICQ et C. MISSENARD.

Lorsque cette compétence à mettre en relation les données d'un problème existe chez les élèves, elle se traduit sous deux approches différentes :

- avec une stratégie basée sur l'écart ;
- avec une stratégie basée sur l'ajout.

Procédure 1. Sur le principe de" l'âge du capitaine"

L'élève fait des calculs avec les nombres de l'énoncé, tout en étant conscient que ces diverses opérations ne lui permettent pas de trouver la solution du problème.

Procédure 2. Décomposition additive par tâtonnement

Soit l'élève utilise des conceptions erronées sur la numération du type : 140 = 14 + 0, soit il estime par vraisemblance, le poids de l'un des trois protagonistes, mais parfois avec rejet d'une éventualité lorsqu'elle se trouve être en contradiction avec les données.

Procédure 3. Observation d'un écart entre deux pesées

L'élève observe un écart entre deux pesées, en déduit que c'est l'écart entre les poids de deux protagonistes, et cherche le problème par tâtonnement, en décomposant la troisième pesée.

Procédure 4. Intervention de la 3ième balance, avec ajout

Mise en œuvre d'un raisonnement du type "comment trouver deux nombres dont on connaît la somme et la différence ?".

L'élève ayant utilisé la procédure 3, ajoute l'écart à la 3ième pesée, puis divise par deux.

Procédure 5. Intervention de la 3° balance, avec retrait

L'élève ayant utilisé la procédure 3, soustrait l'écart à la 3ième pesée, puis divise par deux.

Procédure 6. Répartition autour de la moyenne

L'élève divise par deux, puis répartit l'écart autour de la moyenne.

Procédure 7. Mise en relation des données de deux balances

L'élève additionne les données de deux pesées et soustrait la pesée non utilisée de la somme des deux autres, il obtient ainsi le double du poids d'un des protagonistes.

Procédure 8. Mise en relation des informations données par les trois balances.

L'élève remarque qu'avec la somme des trois pesées, il obtient tous les poids des personnages en double, ce qui lui permet d'obtenir la somme des poids des trois personnages, et, par différence avec chaque pesée, il arrive à résoudre le problème.

Procédure 9. Interprétation graphique de l'énoncé

L'élève reformule l'énoncé sous forme de segments représentant chaque pesée.

Procédure10. Procédure pré - algébrique

L'élève désigne par une lettre, parfois le personnage, parfois le poids du personnage, pour la description de certaines opérations et raconte alors ses stratégies en utilisant ces lettres.

Procédure 11 : Traitement algébrique

Certains élèves du cycle central (essentiellement en classe de 4ème) utilisent des lettres et mettent le problème en équation ; ils cherchent alors à résoudre le système :

- soit par substitution
- soit par combinaison

Procédure 12 : Vérification

Les élèves ayant trouvé les trois résultats vérifient s'ils sont compatibles avec les données du problème.

1.4. QUELQUES ÉLÉMENTS D'ANALYSE

1.4.1. A propos de l'énoncé.

Sur la re-formulation

Certaines données de l'énoncé sont sous forme figurative ; cela peut être un obstacle pour certains élèves. Cependant, on remarque, dans le même temps, que cette forme d'énoncé aide d'autres élèves, bloqués habituellement par un texte.

Par ailleurs, le caractère "pseudo concret" de ce problème peut amener certains élèves à ajouter à l'énoncé des informations suggérées par l'image, et cela peut constituer un obstacle, alors que pour d'autres élèves, les conjectures émises à la vue des personnages peuvent servir de démarrage à la mise en œuvre d'une stratégie.

Les énoncés de problèmes proposés traditionnellement aux élèves, se composent essentiellement de textes avec très peu d'illustrations, pour éviter les risques éventuels de malentendus. Toutefois, les implicites contenus dans les dessins ne gênent pas tous les élèves. Par ailleurs, il peut être intéressant de proposer aux élèves des énoncés dans des registres variés.

On trouve, de façon majoritaire, dans ces narrations un besoin de reformulation des données du problème, peut être dû à la présence d'illustrations dans l'énoncé.

Sur l'interprétation de l'énoncé

Cette re-formulation est souvent accompagnée de considérations personnelles sur l'âge et le poids des personnages, leurs positions sur les balances, la vraisemblance de certaines données, la possibilité que les photos n'aient pas été prises le même jour, entraînant alors d'éventuelles modifications de poids. Ils doutent parfois de l'unicité des objets représentés.

Si le petit garçon ne tourne pas sa tête du même côté dans les deux derniers dessins, ce n'est peut-être pas le même petit garçon ; alors, il est peut-être possible de trouver deux poids différents pour le garçon dans le 2ème et le 3ème dessins ?

Si la tête du gros Dédé n'est pas à la même hauteur dans le 1er et le 2ème dessin, alors, il est peut être possible de trouver par le calcul deux poids différents pour le gros Dédé, un avec le 1er et un avec le 2ème dessin ?

De ce fait, les élèves cherchent à se conforter en pensant que, même si leurs deux résultats trouvés sont différents, ils sont peut-être valables !

Sur le choix des nombres de l'énoncé

On peut penser que certaines postures d'élèves ont été conditionnées par le choix des nombres de l'énoncé. Il serait intéressant par exemple, de proposer ce problème avec des données comme 137kg, 143kg...et 32kg.

1.4.2. À propos du sens de l'égalité.

Le statut du signe d'égalité n'est pas toujours bien acquis, car il y a encore beaucoup d'écritures enchaînées pas à pas ; cependant, même lorsqu'elles sont incorrectes, ces écritures permettent à beaucoup d'élèves d'accéder à la solution. C'est le cas par exemple de 140 + 145 = 285 – 35 = 250 : 2 = 125.

Dans le même ordre d'idée, on trouve beaucoup d'écritures du type : 125 – 140 =15 ou 125 – 145 = 20 ... Et cela ne semble gêner personne !

Et toujours sur cette notion d'égalité, on voit dans de nombreuses narrations de recherche, que le signe d'égalité est essentiellement perçu par les élèves comme annonce d'un résultat, où, le sens de gauche à droite est privilégié. Très peu d'élèves utilisent des parenthèses, ils remplacent systématiquement une opération entre deux nombres par son résultat.

1.4.3. A propos de la preuve ou de la recherche de validation d'un raisonnement.

Certains élèves ne pensent pas à vérifier. Mais d'autres élèves recherchent un moyen de vérification en utilisant les données de l'énoncé.

Soit le résultat est cohérent avec les données et ils sont satisfaits. Soit ces élèves observent une contradiction et on relève alors trois comportements différents :

- ils en restent là ;
- ils repartent sur une autre idée ;
- ils mettent en cause l'énoncé par une phrase du type :

C'est la balance qui est déréglée !

On peut remarquer, dans de nombreux écrits, que lorsqu'un élève observe une contradiction entre les nombres trouvés et une donnée du problème, il conclut alors :

Ou mon résultat est faux, ou c'est le 3ème dessin qui est faux !

L'expression d'une telle alternative n'apparaît pas lorsque l'énoncé est donné sous forme de texte, alors qu'ici la présence de données figuratives semble laisser une place à des possibles éventualités, plus confortables pour l'élève.

Alors que le fait d'avoir deux possibilités permettait justement de vérifier si la démarche était juste, il est étonnant de voir dans certaines narrations, des élèves qui, après avoir trouvé deux poids, affirment :

Pour trouver le 3ème poids j'ai plusieurs possibilités, soit avec cette information, soit avec celle-là ... et je choisis celle-là.

Et c'est tout !

1.4.4. A propos des stratégies de recherche des élèves suivant le niveau scolaire.

En CM1

Certains élèves avouent leur désarroi face à un énoncé dont la forme n'est pas habituelle. Ce désarroi peut se manifester différemment, le plus souvent :

- Ils ne comprennent pas le problème, mais ajoutent de nombreuses considérations sur les personnages, le poids de la serviette autour du gros Dédé (à enlever ou à ajouter au poids obtenu), le régime conseillé, ou alors.....

Il est invraisemblable qu'un chien mette ses pattes sur une balance !

- Ils comprennent ce qui leur est demandé, mais avouent qu'ils ne savent pas résoudre ce problème, qu'il est trop dur, qu'ils n'ont pas d'idées, qu'ils manquent d'informations.

Il faudrait qu'il y en ait un qui monte tout seul sur la balance !

- Ils voudraient faire une division par deux, mais...

C'est impossible qu'un humain ait le même poids qu'un animal. *Je pense qu'un garçon est plus lourd qu'un chien.*

On trouve dans ces écrits des valeurs proposées, parfois au hasard, souvent très liées au contexte, fortement influencées par la perception des trois dessins dans la "réalité". Quand la solution est trouvée, elle est obtenue par essais et erreurs, en tâtonnant sur des possibilités.

On observe des conjectures sur certains poids comme Émilie, CM1 (écrit du type procédure 1) :

Je pense que peut-être ceci est trop difficile pour moi. Mais je crois que Dédé est le plus gros, que Boudin est le plus mince et que Francis est entre les deux. Et je vois cela en regardant les personnages, mais, quand même, je ne suis pas sûre de moi. Mais peut-être que c'est juste mais aussi peut-être que c'est faux. Je ne sais pas les Kg, je pense que le poids de tous ensemble est 320 Kg. Peut-être que Francis fait 30 Kg et que Boudin pèse 5 Kg. J'avais dit que le tout faisait 320 Kg donc il faut que je fasse une soustraction : 320-30-5=285. *Donc Dédé pèse 285 Kg*

Quelques élèves proposent diverses opérations utilisant les nombres de l'énoncé, mais sans trop y croire. C'est le cas de Gabriel, CM 1 (écrit du type procédure 1) :

Je pense que le chien et le garçon pèsent le même poids
Il est dur le problème et je ne sais pas comment m'y prendre pour trouver le poids de Dédé le gros, je crois qu'il faut faire une soustraction.

35+35=70

$$\begin{array}{r} 35 \\ \underline{+\ 35} \\ =\ 70 \end{array}$$

Je pense qu'il faut faire une multiplication pour trouver combien pèsent le garçon et le chien :

$$\begin{array}{r} 35 \\ \underline{-35} \\ =00 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 35 \\ \underline{\times 35} \\ 175 \\ \underline{105.} \\ 1225 \end{array}$$

Non, il faut faire une division

$$\begin{array}{r|l} 35 & 35 \\ \cline{2-2} 00 & \\ & 0 \end{array}$$

Toutes les idées que j'ai eues ne me plaisent pas, je vais partir sur une autre idée.

$$\begin{array}{r} 140 \\ +145 \\ \underline{+\ 35} \\ 320 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 140 \\ \underline{+145} \\ 285 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 140 \\ \underline{+\ 35} \\ 175 \end{array}$$

J'ai essayé de trouver le poids de Dédé pour l'additionner avec le chien et l'enfant.

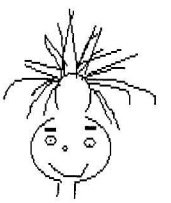
Même si l'écart de poids entre le chien et le petit garçon semble être perçu par quelques élèves, ceux-ci n'arrivent pas à l'exploiter, comme Alexandre, CM1 (écrit du type procédure 3) :

Francis a 5 kg de plus que Boudin

Dédé

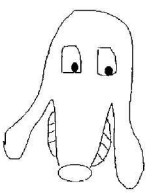
110Kg

Francis



35Kg

Boudin



30Kg

Je vérifie le poids de Francis et Boudin, à non je n'ai pas ça.

Les poids ne sont pas vraiment exacts. L'exercice est un peu difficile pour des primaires, même à la calculette on ne pourrait pas réussir.

En CM2

L'aspect figuratif et pseudo - concret de l'énoncé influence encore de nombreux élèves ; cependant des procédures par tâtonnement apparaissent davantage. On peut observer le travail de Laïla, CM 2 (écrit du type procédure 2) :

Je pense que Boudin pèse 10 Kg.
Que Francis pèse 25 Kg car le garçon est plus grand et plus lourd que le chien
25+10=35 Kg
Dédé doit peser.....Kg, non pour l'instant je ne peux pas car c'est impossible car
140-10=130 / 145-25=120 et il faut que soit égal .
Dédé pèse 130Kg car Boudin pèse 10 Kg et Francis 15. Voici l'opération :
145-15=130 et 140-10=130
Non ce n'est pas bon car 15 et10 ne font pas 35.
Donc je me suis dit que si on rajoutait un 5 de plus à chacun ça pouvait marcher et ça a marché, .j'ai vérifié après en faisant des opérations
15+5=20 / 10+5=15 Kg
Dédé pèse 125 Kg car Boudin pèse 15Kg et Francis 20Kg
Voici l'opération : 145-20=125 et 140-15=125
Ce sont des résultats égaux.

L'identification de l'écart des 5 kg permet au tâtonnement de s'organiser et déclenche chez certains élèves, une stratégie menant à la solution comme pour Julien, CM 2 (écrit du type procédure 5) :

Je vois que quand gros dédé est sur la balance avec le chien, il y a 5 Kg de moins que quand il y a gros dédé et le garçon donc le garçon pèse 5Kg de + que le chien.
Quand le chien et le garçon sont sur la balance, il y a 35 Kg, comme le garçon a 5Kg de + que le chien, on met de côté les 5Kg et maintenant on divise par 2 les 30Kg puisqu'il y a 5 Kg d'écart entre eux 2 et cela fait 15 Kg pour le chien et 20Kg pour le garçon.
Maintenant, on regarde. Puisqu'il y a gros dédé et le chien qui pèsent 140Kg, on fait 140-15=125Kg,alors,normalement gros dédé fait 125Kg, on vérifie avec le garçon :
145-20=125Kg .
Alors gros dédé fait 125Kg , le garçon fait 20Kg et le chien fait 15 Kg .

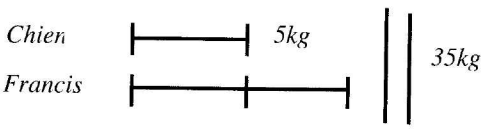
Quelques élèves ont l'idée de réunir les données de deux balances voisines. On voit alors s'amorcer la procédure 7 mais cela ne leur permet pas toujours d'arriver à la solution.

En 6ème

Des schémas apparaissent pour illustrer l'écart perçu, dans lesquels des segments représentant les poids des personnages semblent être, pour certains élèves, des éléments déclencheurs de stratégies ou, pour d'autres élèves, des outils de vérification de solutions trouvées.

Luc, 6ème (écrit du type procédure 9) réalise un tel schéma :

La première remarque que j'ai faite est la suivante :
Il est tout à fait logique que Francis soit plus lourd que le chien.



Il a 5kg de plus que le chien car
Dédé + chien = 140
Francis + Dédé = 145

Calcul du poids du chien :
35-5 = 30 *30 : 2 = 15* *15 + 5 = 20*
Calcul du poids du gros Dédé
35 – 20 = 15 *145 – 15 = 125*

Des procédures de type arithmétique sont mises en œuvre par quelques élèves qui ont l'idée de mettre les informations en relation, en ajoutant les données de deux balances voisines, et cela leur permet d'accéder à la solution. C'est le cas de Claire, 6ème (écrit du type procédure 7) :

Peut-être que si j'additionne 140 et 145 ça fait 285-35=250
on trouve le poids du gros Dédé non, ce n'est pas ça, il y a deux fois le gros Dédé dans 140 et 145
...Ah, j'ai trouvé ! On divise par 250 par 2 = 125 kg et on trouve le poids du gros Dédé!
Ensuite on soustrait 140 à 125 pour trouver le poids du chien : 15kg et puis on retranche 145 à 125 = 20kg, c'est le poids du petit garçon !
youpi, j'ai trouvé !

Aucun élève n'a eu l'idée de relier les données de la 1ère et de la 3ème pesée correspondant aux balances les plus éloignées !

Au cycle central ($5^{ème}/4^{ème}$)

Toutes les procédures précédemment décrites se retrouvent aussi à ces niveaux mais les procédures arithmétiques majoritaires sont basées sur l'observation de l'écart des 5 kg ou sur l'idée de rassembler plusieurs informations. Jérémie, 5ème (écrit du type procédure 8) utilise les trois pesées :

> *Remarque : Chaque personne est 2 fois dans les dessins donc si on ajoute tous les nombres et on les divise par 2 on obtient le poids de toutes les personnes.*
>
> *Calculs : 140 + 145 + 35 = 320 et 320 : 2 = 160*
>
> *Remarque : Si 160 on le soustrait par 35Kg on trouvera le poids du gros Dédé*
>
> *comme dans 35Kg on a trouvé le poids du petit Francis et du chien Boudin mais pas celui du gros Dédé.*
>
> *Calculs : 160 – 35 = 125*
>
> *Remarque : Et maintenant si on soustrait 140 et 145 par 125 on aura le poids du petit Francis et du chien Boudin.*
>
> Calculs : 140 – 125 = 15 et 145 – 125 = 20

On voit à présent dans certains écrits d'élèves, des expressions contenant des lettres, cela reste surtout de type "pseudo algébrique".

Certains élèves du cycle central au collège, utilisent des lettres :

- soit comme initiales des prénoms des personnages (très contextualisé) ;
- soit x, y, v ... (les lettres désignant des nombres à trouver).

Ces élèves racontent alors leurs stratégies en utilisant ces lettres :

- soit accompagnées de textes décrivant les actions, où même les signes opératoires sont exprimés en lettres ;
- soit accompagnées de textes explicatifs, mêlés de symboles mathématiques, avec des successions d'égalités incorrectes, où les résultats intermédiaires ne sont pas exprimés, mais qui conduisent à trouver la solution.

Le travail de Clémentine, 4ème (écrit du type procédure 11) est remarquable à ce sujet :

D'abord, j'ai mis tous les calculs qui m'étaient indiqués.

Données :

$$\left.\begin{array}{l} Dédé + Francis = 145Kg \\ Dédé + Boudin = 140Kg \end{array}\right\} \text{ donc, Francis pèse 5kg de plus que Boudin}$$

Boudin + Francis = 35Kg

Ensuite j'ai cherché à poser mes équations. Cela a donné :

D = Dédé = 140 – B = 145 - F

B = Boudin = 35 - F

F = Francis = 35 - B

Donc 140 – B = 145 - F / 140 - (35 - F) = 145 - F

Donc là, je me suis rappelé que pour calculer l'équation, il fallait changer les signes de la parenthèse puisque c'est précéder du signe moins.

Donc cela a donné :

140 – 35 + F = 145 - F

Après je me suis rappelé comment isoler le 2 F de l'équation:

$$\begin{array}{r|l} 140 - 35 + F = 145 - F & 2F = 5 + 35 \\ F = 145 - F - 140 + 35 & 2F = 40 \\ F + F = 145 - 140 + 35 & F = 40 : 2 \end{array}$$

Francis=20Kg

Je l'ai soustrait à 35kg (le poids de Francis et Boudin)et cela m'a donné 15Kg au chien Boudin, donc :

140Kg	*145Kg*
- 15 Kg	*- 20 Kg*
125 pour Dédé	*125 pour Dédé*

Conclusion :Dédé pèse 125kg,Boudin 15kg et Francis 20kg.

1.5. CONCLUSION

À partir des écrits produits, on observe une grande diversité d'attitudes face à ce problème, et une évolution des procédures mises en œuvre par les élèves.

On remarque également, en analysant ces narrations, que certaines stratégies de recherche apparaissent de façon plus fréquente à un niveau de classe donné.

Majoritairement, (même en 4ème) la démarche des élèves est de type arithmétique, avec un raisonnement explicité dans un langage naturel très contextualisé, accompagné de calculs sur les nombres.

1.6. LA COPIE DE CÉDRIC, ÉLÈVE EN CM2

Cédric - CM2 Narration de recherche : Gros dédé sur une balance

En premier je regarde les images, il n'a pas tous le même poid. C'est un peu dur - à mon avis je pense que le gros dédé pèse au moins vers les 100 kg.

Je sais déjà que Francis pèse 35 kg avec le chien et que Dédé et Francis pèse 145 kg et que Dédé avec le chien pèsent 140 kg. Je pense que le chien est plus léger que le garçon.

Je vois que quand Boudin le chien est sur la balance, le poid total est 140 kg alors que quand c'est le petit Francis qui est dessus le poid égale 145. Alors déja je sais que le petit garçon pèse 5 kg de + que le chien.

C'est logique car dans la 2ème image il y a 5 kg de + que dans la 1e image. Comme il pesent 5 kg de plus on peut pas faire diviser 2.

Au debut j'ai vu que le chien et plus petit que le garçon.

Je me dit comme le chien et le garçon font ensemble 35 kg j'enlève 5 kg au 35 kg que je met du côté du garçon et ensuite je partage les 30 qui me reste en deux partie égale ce qui me donne 15 kg.

Maintenant on sais que le chien Boudin pèse 15 kg et Francis 20 car 15 plus 5 kg de côté égal 20.

On regarde encore les images et on fait pour la première 140 - 15 = 125 et pour la 2ème 145 - 20 = 125.

140	140	145	Le gros dédé pèse autant dans les deux images.
- le chien	- 15	- 20	
= gros dédé	125	125	

Alors dédé pèse 125 kg, le garçon fait 20 kg et le chien 15 kg.

2. LE CHIFFRE DES UNITÉS DE 13^{2000}

2.1. ÉNONCÉ

> Si je calcule 13^1, le chiffre des unités est 3. Si je calcule 13^2, le chiffre des unités est 9.
>
> Quel est le chiffre des unités de 13^3, 13^4, 13^5 ?
> Quel est le chiffre des unités de 13^{2000} ?

Cet énoncé a été donné en 2000, la dernière puissance peut, bien sûr, être actualisée chaque année sans changer la nature du problème.

2.2. OBJECTIFS

En 4ème ce travail est un préliminaire à l'institutionnalisation des règles de calcul sur les puissances. Certaines règles peuvent alors être découvertes et plusieurs théorèmes - élèves vont aussi être mis à jour et rejetés.

Il permet de plus de faire émerger les conceptions des élèves sur la numération de position et sur leur capacité à évaluer un ordre de grandeur.

Certains élèves vont utiliser des contre-exemples pour invalider spontanément une conjecture. La séance réservée au compte rendu permettra de poursuivre ce travail autour du contre-exemple.

2.3. MÉTHODES DE RECHERCHE DES ÉLÈVES

On relève quatre directions différentes dans les recherches conduites par les élèves.

- Tentative de calcul de 13^{2000} utilisant des propriétés valides ou erronées sur les puissances.
- Induction du résultat final à partir des seuls résultats calculables à la machine.
- À partir des premiers résultats, observation d'une régularité et recherche d'une loi permettant d'induire la réponse.
- Utilisation des puissances de 3.

Essai de calcul de 13^{2000}.

Procédure 1. Âge du capitaine

L'élève utilise les chiffres des unités des premiers nombres trouvés à l'aide de la calculatrice et fait une opération au hasard utilisant tous ces nombres ainsi que 2000.

Procédure 2. Théorème - élève

L'élève induit une propriété erronée lui permettant de calculer ou de se rapprocher du résultat final à l'aide de la calculatrice et "d'égalités" successives.
Les conjectures utilisées sont :

$$13^n = 13 \times n \; ; \; 13^{pq} = p \times 13^q \; ; \; 13^{pq} = (13 \times p)^q \; ; \; 13^p = p^{13}$$

Procédure 3. Utilisation de l'égalité $13^{2n} = (13^2)^n$

Il procède par réitérations successives, vérifie que la procédure est valide sur un cas simple et calculable à la machine, mais aboutit bien entendu à une impasse.

Induction du résultat final à partir des premiers résultats.

Procédure 4. Utilisation de 13^0 et de 13^8

L'élève constate que $13^0 = 1$ et que 13^8 se termine par 1 et en déduit donc que 13^{2000} finira aussi de la même façon.

Recherche d'une régularité.

Ces différentes procédures de recherche d'une régularité n'ont été entreprises qu'après l'échec d'une ou plusieurs tentatives pour trouver le résultat.

Procédure 5. Écriture de plusieurs puissances de 13

L'élève écrit toutes les puissances de 13 calculables à la machine, découvre la régularité dans l'apparition du chiffre des unités, poursuit avec d'autres puissances de 13 et induit le résultat final.

Procédure 6. Recherche d'une propriété liant la parité de l'exposant et le chiffre des unités

L'élève découvre à partir des premiers résultats que suivant la parité de l'exposant il n'y a que deux possibilités de réponse.

Procédure 7. Recherche d'une propriété tous les 4

Après calcul des premières puissances, l'élève découvre la régularité de 4 en 4.
Certains élèves écrivent ensuite les puissances de 4 en 4 puis de 8 en 8, de 24 en 24, de 48 en 48, de 96 en 96…
Confusion de certains qui comptent de 5 en 5.

Procédure 8. Recherche d'une propriété tous les 20

Comme dans la procédure 7, l'élève découvre une régularité de 20 en 20 et utilise cette propriété pour se rapprocher le plus possible de la puissance souhaitée.

Procédure 9. Division de l'exposant par 4

Après avoir remarqué la régularité de 4 en 4, l'élève divise l'exposant souhaité par 4 et trouve le chiffre des unités de la puissance de 13 multiple de 4 la plus proche de la puissance souhaitée, puis termine par étapes si nécessaire.
Certains relient le chiffre des unités que l'on va obtenir avec le reste de la division de l'exposant par 4.

Utilisation des puissances de 3.

Procédure 10. Utilisation de 3^u , u étant le chiffre des unités de l'exposant
L'élève a compris qu'il suffisait de multiplier par 3 le chiffre des unités pour trouver le chiffre des unités de la puissance suivante, d'où il conjecture qu'il suffit de ne s'intéresser également qu'au dernier chiffre de l'exposant.

Procédure 11. Régularité des puissances de 3
L'élève sait ou redécouvre que la réponse va dépendre des résultats des puissances du dernier chiffre c'est-à-dire des puissances de 3 et cherche une régularité.
On retrouve certaines des procédures précédentes qui permettent de trouver plus rapidement la réponse.

2.4. QUELQUES ÉLÉMENTS D'ANALYSE

Numération de position et incidence sur l'algorithme de la multiplication.

La provenance du chiffre des unités du produit de deux nombres ne paraît pas acquise pour un bon nombre d'élèves de 4ème, puisqu'une minorité l'utilise pour simplifier le problème et pour certains c'est vraiment une découverte comme pour Julie :

> *Alors maintenant je vais essayer de trouver une règle car c'est long et embêtant de faire des calculs :*
> *$3 \times 3 \times 3 = 27$ $2 + 7 = 9$. Ce n'est pas bon...Mais si ! Si je prends le chiffre des unités de la multiplication des unités, c'est JUSTE!*
> *Je crois que j'ai trouvé (ou inventé) une règle :*
> *Pour trouver le chiffre des unités d'un nombre à puissance (je pense que ça s'appelle comme ça), on ne multiplie que ses unités et on prend l'unité du résultat obtenu et c'est normalement, juste.*
> *Je vais l'appliquer, tant pis si c'est faux mais comme je suis presque sûre que c'est juste, je le fais.*

La technique de la multiplication n'est plus disponible pour certains, comme c'est le cas pour Sébastien :

815730721	6424994941
× 815730721	× 6424994941
6424994941	37664934261

Ou pour Charlotte :

$371\,293$	$4\,826\,809$
$\times \quad 400$	$\times \quad 333$
$1\,485\,172$	$13\,560\,627$
	$13\,560\,627$
	$13\,560\,627$
	$40\,681\,881$

Est-ce l'effet du traitement des grands nombres qui brouille les savoirs ?

En ce qui concerne les élèves en difficulté, il n'y a pas de connaissances disponibles sur le produit des nombres impairs, ce qui n'est pas étonnant car le programme n'y fait nullement référence. Ne serait-ce pas, pourtant, un outil performant et simple pour invalider certaines conjectures erronées donnant un résultat pair ?

Conception de la tâche mathématique.

Ce travail permet de faire émerger la perception de certains élèves quant à la tâche mathématique attendue quand des nombres sont en jeu.

Ainsi Audrey fait de nombreux calculs avec les nombres donnés dans le problème et n'est pas du tout critique quant au résultat même si elle essaie de vérifier en changeant de méthode.

Puisque, je ne peux pas calculer 13^{2000} sur la calculette : je vais calculer les résultats de 13^1 ,13^2 ,13^3 ,13^4 ,13^5 ,13^6 et dans ce résultat je prends l'unité car c'est toutes les unités que je vais calculer :

13^1 → unité → 13
13^2 → unité → 9
13^3 → unité → 7
13^4 → unité → 1
13^5 → unité → 3
13^6 → unité → 9

22113 (elle a multiplié ces différents nombres)

Après, je calcule 22113 × 2000 = 44226000 . l'unité est 0 .

Je vais essayer une autre solution.

Je vais essayer de faire : on calcule 13^4 je prends le 4 je le multiplie × 500 = 2000

Eh bien ! si je prends le résultat de 13^4 et que je le multiplie par 500 ça nous donnera le résultat que je cherche :

$13^4 \times 500 =$

28561× 500 = 14280500

le chiffre de l'unité est 0 comme la solution 1.

Certains élèves restent prisonniers de l'énoncé et ne se permettent pas de faire d'autres calculs que ceux indiqués dans le texte. Ils essaient alors de se servir des premiers résultats pour trouver la solution. Certains décomposent de deux façons différentes et rejettent alors la procédure car ils ne trouvent pas le même nombre.

Le résultat affiché de la calculatrice n'est pas remis en cause même s'il est inconnu ; cette narration permet donc de rencontrer l'écriture scientifique et de refaire lors du compte-rendu un bilan sur les écritures des nombres déjà fréquentées.

Contre-exemple.

Ce travail permet aussi de travailler la notion de contre-exemple pour invalider les règles incorrectes induites par les élèves.

Ainsi Sébastien trouve lui-même un contre-exemple de la règle qu'il avait inventée :

$13^{2000} = 26^{1000} = 52^{500} = 104^{250} = 208^{125} = 416^{62,5} = 832^{31,25}$ *je divise par 2*

$13^6 = 26^3$ *pas bon*

× *par même nombre* $13^6 = 482609$

$169^3 = 482609$ *OK*

$13^{2000} = 169^{1000} = 28561^{500} = 815730721^{250} = 6424994941^{125}$

Lors de la séance réservée au compte rendu chaque conjecture émise par un des élèves dans sa narration sera proposée à la classe afin qu'elle la rejette en exhibant un contre-exemple ou qu'elle essaie de la justifier.

2.5. PROLONGEMENTS

Variante de l'énoncé et influence.

Complète le tableau ci-dessous :	
Si je calcule	Le chiffre des unités du résultat est :
13^1	3
13^2	
13^3	
13^4	
13^5	
13^9	
13^{20}	
13^{2000}	

Alors que de nombreux élèves en difficulté s'interdisent de calculer autre chose que ce qui est demandé dans l'énoncé analysé auparavant, cette attitude est pratiquement inexistante avec cette nouvelle formulation.

Par contre les règles de calcul sur les puissances induites par les élèves sont moins présentes dans la deuxième.

Sujet pouvant être un préliminaire.

Un autre sujet concernant l'introduction des puissances permet de faire émerger les conceptions erronées sur les décimaux et peut être un travail préliminaire à celui-ci. Il a également l'avantage d'être traité rapidement :

Combien de fois faut-il plier une feuille de 0,1mm d'épaisseur pour que la nouvelle épaisseur puisse permettre d'atteindre le haut de la Tour Eiffel qui se trouve à 320 m du sol.

Pour Caroline, le nombre à virgule est constitué encore de deux entiers accolés qu'elle traite à part, et l'ordre du même coup n'est pas installé :

1er pliage = 0,2 mm	*6° pliage = 0,64 mm*
2° pliage = 0,4 mm	*7° pliage = 0,128 mm*
3° pliage = 0,8 mm	*8° pliage = 0,256 mm*
4° pliage = 0,16 mm	*9° pliage = 0,512 mm*
5° pliage = 0,32 mm	*10° pliage = 1024 mm*

2.6. La copie de Mélanie, élève en quatrième

Page 1

Si je calcule	le chiffre des unités du resultat est :
13^1	3
13^2	9
13^3	7
13^4	1
13^5	3
13^9	3
13^{20}	1
13^{1995}	3

Pour trouvez 13^1 vous avez, dans le resultat 13 pris le dernier nombre qui est donc le 3. Ensuite pour trouvez 13^2 vous avez fait 13x13 ce qui fait 169 et vous avez pris le dernier nombre donc le 9. Ensuite je vais calculer le autres maintenant : 13^3 c'est égale à : 13x13x13 ce qui fait 2197 donc je ajoute au tableau le dernier nombre : 7. Ensuite je continue pour 13^4 = 13x13x13x13 ce qui fait 28 561 j'ajou le 1 au tableau. Ensuite 13^5 je fais 13x13x13 13x13 ce qui fait 371293 j'ajoute donc le 3. Je remarque tout d'abord que ce n'est que des chiffres impairs 13^6 ça fait 4826 809 ce qui fait 9 en dernier nombre et c'est bizarre parce que c'est toujours les même nombres

13^{20}	1
13^{21}	3
13^{22}	9
13^{23}	7
13^{24}	1
13^{25}	3
13^{26}	9
13^{27}	7
13^{28}	1
13^{29}	3
13^{30}	9
13^{31}	7
13^{32}	1
13^{33}	3
13^{34}	9
13^{35}	7
13^{36}	1
13^{37}	3
13^{38}	9
13^{39}	7
13^{40}	1
13^{41}	3
13^{42}	9
13^{43}	7
13^{44}	1
13^{45}	3
13^{46}	9
13^{47}	7
13^{48}	1
13^{49}	3
13^{50}	9

que se suivent 3,9,7,1 et après sa recommence mais au début c'est plus facile tout les nombres se suivent je suis obligé de calculer 13^7 et 13^8 pour trouver 13^9 mais si je suis l'ordre des nombres que je vous ai écrit tout à l'heure je suis que le dernier nombre de 13^7 c'est 7 et le dernier nombre de 13^8 c'est 1 donc 13^9 c'est 3. Pour 13^{20} je vais faire la même chose. Alors : 13^{10} l'unité c'est 9. 13^{11} l'unité est : 7. 13^{12} l'unité est 1. 13^{13} l'unité est 3. 13^{14} l'unité est 9. 13^{15} l'unité est 7. 13^{16} l'unité est 1. 13^{17} l'unité est 3. 13^{18} l'unité est 9. 13^{19} l'unité est 7 e enfin 13^{20} l'unité est donc 1.

Je ne peux plus continuer jusqu'à 1995 comme ça je n'ai pas envi d'y passer les vacances.

Je remarque donc que de 4 en 4 c'est toujours le même nombre mais je ne peux pas arriver à 1995 donc il faut que je trouve... Bref! Je viens de m'apercevoir que tous les 10 ça fait 1, 9.

Ex: 20 = 1.
30 = 9
40 = 1
50 = 9

et ainsi desuite donc tous les 20 c'est des 1 ou tous les 20 c'est 9. ça depends!

Tous les nombres donc le premier chiffre est pair et qui est suivit d'un 0 (ex : 20, 40, 60, 80 ect) et bien le nombre c'est 1.

Si on continu de 20 à 30 eh bien toutes les centaines on trouvera 1 donc quand on va arriver à 1900 ce sera 1 à 1990 ce sera 9 car 90 à le 1er nombre qui est impair et si on y ajoute le 5 alors cela fait 3

En fait c'est complètement insensé ce que j'ai écrit je recommence Je voudrais bien trouver une autre solution mais je n'en vois pas d'autres.

Je sais que tous les 1000 c'est 1 mais 900 c'est 9 et 95 c'est 3 donc je sais pas !!!

Bon je vais prende le dernier nombre donc le 3 je vais l'ajouter dans le tableau.

Voilà je ne suis pas très sûre de mon choix mais nous verrons Bien.

3. SI ON DOUBLAIT L'AIRE

3.1. ÉNONCÉ

Construire deux carrés de telle sorte que le deuxième ait une aire double de celle du premier.

3.2. OBJECTIFS

En classe de 3ème ce sujet est très intéressant pour sensibiliser les élèves au fait que les décimaux ne sont pas suffisants pour exprimer toutes les mesures et qu'il a été donc nécessaire d'inventer de nouveaux nombres.

Ce problème permet aussi d'approfondir le travail autour de valeur exacte et valeur approchée d'une mesure et de faire un travail critique sur l'affichage de la calculatrice.

Il est bien entendu indispensable de le donner avant tout travail systématique de calcul sur les racines carrées.

3.3. MÉTHODES DE RECHERCHE DES ÉLÈVES

On relève deux directions différentes dans les recherches conduites par les élèves.

- Calcul de la longueur du côté du nouveau carré.
- Méthode géométrique par découpage et puzzle.

Les élèves utilisent tous une procédure calculatoire en premier lieu et n'acceptent d'imaginer une procédure géométrique qu'après relance de l'enseignant.

Calcul de la longueur du côté.

Procédure 1. On double la longueur du côté

L'élève construit le carré dont le côté est le double de celui qu'il a choisi au départ, calcule les aires des deux carrés et s'aperçoit que ce n'est pas correct.

Procédure 2. Utilisation de la touche racine carrée de la calculatrice

L'élève calcule l'aire du premier carré, la double et utilise la touche racine carrée de la calculatrice pour trouver la longueur de ce nouveau carré.

Procédure 3. Dichotomie
L'élève multiplie deux nombres identiques entiers de façon que le produit soit proche du nombre cherché, puis essaie avec des décimaux à une décimale, puis à deux décimales et parfois continue.

Procédure 4. Utilisation de règles d'algèbre
L'élève généralise le problème en utilisant l'algèbre, calcule la longueur du côté en fonction de la longueur du côté initial, puis remplace par la valeur qu'il avait choisie.

Procédure 5. Recherche d'un coefficient de proportionnalité
L'élève calcule une valeur approchée du côté du 2ème carré en changeant plusieurs fois les dimensions du carré initial, puis il essaie de trouver un coefficient de proportionnalité reliant le côté du 1er carré et celui du 2ème.

Procédure 6. Calcul de la diagonale
L'élève calcule la longueur de la diagonale du carré avec le théorème de Pythagore, divise l'aire du 2ème carré par ce nombre et retrouve à peu près la même chose, donc prend cette dimension pour côté du 2ème carré.

Découpage et puzzle.

Procédure 7. Découpage en carreaux unités
L'élève découpe le carré initial en petits carreaux unitaires, fait un deuxième carré identique et essaie d'assembler les petits carrés obtenus pour fabriquer un nouveau carré.

Procédure 8. Compléter le 1er carré avec les morceaux d'un autre carré identique
L'élève découpe un carré identique en morceaux et essaie de placer les différents morceaux autour du 1er carré pour obtenir un nouveau carré.
Il découpe la plupart du temps d'abord en rectangles, puis en triangles.

Procédure 9. Découpage du 2ème carré en deux carrés identiques
L'élève part du grand carré et par pliage et découpage se ramène à un carré d'aire moitié.

3.4. Quelques éléments d'analyse

Le nombre irrationnel.

La plupart des élèves essaient de multiplier à plusieurs reprises deux décimaux identiques possédant des décimales pour tenter d'obtenir un nombre entier.

Ils n'ont donc pas de représentation correcte concernant le produit de deux nombres à virgule.

Donc, logiquement, l'aire de mon 2ème carré devrait faire : $2 \times 16 = 32cm^2$
je cherche un diviseur identique ou multiple pour 32.
32 se trouve entre :
$6 \times 6 = 36$
$5 \times 5 = 25$
je prends donc : 5,5 .
$5,5 \times 5,5 = 30,25$
je ne trouve toujours pas 32.
Je prends donc : 5,56
$5,56 \times 5,56 = 30,9136$
je ne trouve toujours pas 32.

Seule une minorité utilise une racine carrée pour donner la longueur du 2ème carré, les autres ne peuvent visiblement envisager que des nombres décimaux, ce qui est cohérent si l'on se réfère aux instruments de mesure habituellement utilisés.

Affichage de la calculatrice.

Il y a quatre types de comportement concernant la prise en compte du résultat que renvoie la machine :

- Prise de conscience du caractère approché

L'aire du second carré est égale à 32 cm^2
alors je fais $\sqrt{32}$
$\sqrt{32} = 5,6568542$
je n'ai pas la valeur exacte la seule chose donc je suis sûre c'est que le côté du second carré est égal à la racine carrée de 32.

- Arrondi de la valeur affichée, mais non mentionné clairement

Je me suis aperçu que, en faisant la racine carrée de 16, je trouve 4. Donc j'essaie de faire la racine carrée de 32 ça me donne 5,6. Donc je vais essayer de faire le 2ème carré avec 5,6cm.

- Prise en compte de toutes les décimales affichées et rejet

> *Donc*
> *5,6568542 × 5,6568542 = 31,999999*
> *Il y a trop de chiffres après là, pour que je puisse construire le carré.*

- Prise en compte de toutes les décimales affichées et vérification par calcul de l'aire avec la touche "x^2"

> *L'aire du grand carré (5,78) et j'ai trouvé 2,404 163056. Je l'ai multiplié par lui-même et j'ai retrouvé 5,78cm^2 ..*

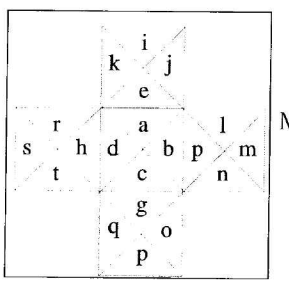
Le statut des mesures dans les démonstrations.

- Rejet de la solution géométrique car les calculs à partir des mesures effectuées sur le dessin ne confirment pas la conjecture

> *Je vais essayer une autre technique*
> *Je calcule l'aire du 1er carré 1,6 × 1,6 = 2,56*
> *Je calcule l'aire du second carré 2,3 × 2,3 = 5,29*
> *Je regarde si l'aire du second carré est le double du 1er*
> *2,56 × 2 = 5,12*
> *Ce n'est pas bon, on ne peut pas le faire*
> *C'est impossible*

Les mesures emportent la conviction de l'élève au détriment d'un raisonnement utilisant des égalités d'aires.

- Justification par des considérations d'aires de figures isométriques.



Maïlis réalise la figure ci-contre et écrit :

J'ai eu une idée car vu qu'en doublant les carrés ça ne marche pas je décide de partager un carré en traçant les diagonales.
Vu que les diagonales partagent le carré en 4 parties égales donc a = b = c = d
Je construis 4 autres carrés à partir des 4 côtés et de 2 carreaux sur 2 également, je trace les diagonales et je constate que vu que c'était les mêmes longueurs :
a= b = c = d = e = f = g = h = i = j = k = l = m = n = o = p = q = r s = t
je vois que le carré abcd + les triangles e-f-g-h forment un autre carré qui est divisé en 8 triangles égaux donc vu que le petit carré fais 4 triangles + 4 autres triangles = 8 c'est le double donc ça marche.

3.5. CONCLUSION

Ce sujet permet d'avoir quelques éléments de réponse concernant :

- Les conceptions des élèves sur les notions de valeur exacte et valeur approchée.
- Leurs connaissances des règles régissant le calcul algébrique et leur appropriation quant à la résolution du problème.
- Les outils de démonstration maîtrisés par les élèves en géométrie, et ceux qui emportent leur conviction.

3.6. La copie de Lis, élève en troisième

Page 1

J'ai un carré. Je veux construire un nouveau carré dont l'aire est le double de celle du 1e carré.

Si je prend un carré de 2 carreaux de coté il a une aire de 4 carreaux donc le deuxième carré devra avoir une aire de 8 carreaux (2×4).

Mais je me rend compte qu'il est impossible de faire un carré de 8 carreaux en aire. Je vais reessayer avec des centimètres. Je fais un carré de 2cm de coté, il a une aire de 4 cm, mon deuxième carré devra avoir une aire de 8 cm.

C'est impossible car le nombre qui se rapproche le plus est 7,29 cm² avec pour coté 2,7.

C'était des nombres pairs, je vais essayer avec des nombre impaires. Je fais un carré de 3cm de coté. Son aire est 9cm (3×3).

L'aire du deuxième carré est donc de 18 et c'est impossible car pour avoir 18 pour aire il faudrait que le coté soit 4,2426...

Pour que cela soit possible à faire il faut que l'on soit sûr que l'aire du deuxième carré soit possible à réaliser. Il faut alors que le double de l'aire du 1e carré soit divisible par un nombre qui multiplié par lui-même donne le double de l'aire du ~~petit~~ 1e carré.

Je vais essayer d'écrire avec l'algèbre donc si A = aire du 1e carré

x = le coté du 1e carré

y = le coté du 2e carré

Je peux écrire :

$A = x^2$

$y^2 = 2A$ donc

$y^2 = 2x^2$

Je pense qu'il doit y avoir un rapport de proportionalité entre les cotés du 1e carré et les cotés du 2e carré

Si je prend un carré d'1 centimètre de coté, son aire sera de 1 cm², l'aire du deuxième carré sera de 2 cm².

Les cotés du deuxième carré mesureront $\sqrt{2}$

$\sqrt{2} \approx 1,4142136$ donc il y a une sorte de proportionalité :

$1 \xrightarrow{\times\sqrt{2}}$ coté du deuxième carré

$1 \quad \boxed{1} \xrightarrow{\times 2} 2$

$\times\sqrt{2}$ → coté du deuxième carré

Je vais prendre d'autres carrés pour vérifier

$3 \longrightarrow \sqrt{18} \approx 4,2426407...$

3 | 9 | et $3 \times \sqrt{2} \approx 4,2426407$ donc $\sqrt{18} = 3 \times \sqrt{2}$ — 18

$10 \Rightarrow \sqrt{200} \approx 14,142136$

10 | 100 | $10 \times \sqrt{2} = 14,142136$ donc $\sqrt{200} = 10 \times \sqrt{2}$ — 200

Donc à chaque fois qu'on multiplie l'aire d'un carré par 2 il faut multiplier la longueur de chacun des cotés par la racine carré de 2 et comme celle-ci est un nombre à virgule infini, les cotés du deuxième carré ne pourront jamais tomber juste donc le problème est impossible.

Dans la 1e feuille que je vous ai rendu j'avais prouvé que c'était impossible mais comme vous avez dit que c'est possible je vais continuer.
Si je commence par prendre le deuxième carré et que je divise l'aire par deux j'ai l'aire du 1e carré, et si je prends des carreaux comme unité de mesure je pourrai les découper pour arriver à faire le 1e carré.

Aire : 4 carreaux

donc le 1e carré à une aire de 2 carreaux donc cette surface là :

je peux le découper en $\frac{1}{4}$ de carreaux, j'ai maintenant 8 quarts de carreaux. Je peux découper ces quarts de carreaux en 2, je peux avoir des moitiés de quart de carreaux.

Dans 2 carreaux j'ai 16 demi quart de carreaux.
Un carreau fait 8 millimètres de coté, un quart fait 2 millimètre sur 8, ou 4 millimètres sur 4, un demi quart fait 2 millimètre sur 4 ∞
L'aire d'un carreau est de 64 mm², l'aire de 2 carreaux est de 128 mm, la racine carrée de 128 est de 11,... donc c'est impossible avec 2 carreaux comme aire
Ça ne marche pas. Si je prend des mesures ça ne peut pas marcher. Pour ne pas avoir à prendre des mesures

Page 4

il faut faire des pliages. Je prends une feuille carrée
que je plie selon l'une diagonale. j'ai maintenant un triangle
rectangle dont l'aire est égale à la moitié de celle du 1er carré.
Je replie ce triangle rectangle en deux en suivant la hauteur
qui part de l'angle droit. Ce dernier triangle obtenu est
égal au quart de l'aire du grand carré. Je le prends deux
fois et je cole les deux triangle par l'hypothénuse. J'obtiens
alors un carré dont l'aire = l'aire du grand carré ÷2.
Il est possible aussi de faire l'opération dans l'autre sens donc
je répond bien à la consigne du problème.

4. POINTS ET SEGMENTS

4.1. ÉNONCÉ

Étant donnés quelques points placés sur une feuille, combien peut-on tracer de segments différents joignant deux quelconques de ces points ?

Compléter le tableau suivant :

Si j'ai	Je peux tracer au plus ....
1 point	0 segment
2 points	1 segment
3 points	3 segments
4 points	6 segments
5 points	
6 points	
7 points	
12 points	
20 points	
108 points	
n points (n est un entier positif)	

4.2. OBJECTIFS

De la 6ème à la 1ère ce travail favorise l'apprentissage de la démonstration (et son enracinement géométrique dans ce cas). Il offre la possibilité d'observer le traitement par les élèves du passage du particulier au général avec l'introduction du nombre n et l'équivalence de formules numériques. Il permet au cycle central une bonne approche des formules algébriques.

4.3. MÉTHODES DE RECHERCHE DES ÉLÈVES

On relève trois directions différentes dans les recherches conduites par les élèves.

- Comptage effectif des segments avec ou sans figure.
- Recherche d'une relation numérique à partir des premiers résultats du tableau.
- Transformation d'une formule en une autre lorsque plusieurs formes de réponses ont été obtenues.

Les deux premières concernent la recherche d'une solution au problème posé. La dernière est une conséquence des résultats entrevus et d'une tentative de réduction du nombre de calculs.

Chacune de ces directions fait référence à un certain nombre de procédures énoncées ci-dessous. Nous n'avons retenu que celles apparaissant au moins dans deux copies différentes.

Comptage effectif des segments.

Procédure 1. Ajouter point

L'élève se rend clairement compte que lorsqu'il ajoute un point à la figure déjà tracée et qui en comporte p, il augmente le nombre de segments de p. Cette procédure conduit à $N_n = N_{n-1} + (n-1)$.

Procédure 2. Compter et ajouter point

L'élève se rend clairement compte que lorsqu'il ajoute un point à la figure déjà tracée et qui en comporte p, il augmente le nombre de segments de p. Il compte les segments en commençant à partir de 2 points. Cette procédure conduit pour le résultat final à $N_n = 1 + 2 + 3 + ... + (n-1)$.

Procédure 3. Compter avec méthode

L'élève compte méthodiquement les segments pour n points. Du premier point il dénombre n–1 segments, du second n–2 (il ne recompte pas celui déjà tracé), etc.... Cette procédure conduit pour le résultat final à

$$N_n = (n-1) + (n-2) + (n-3) + ... + 1.$$

Procédure 4. Segments et vecteurs

L'élève compte méthodiquement les segments pour n points. Du premier point il dénombre n–1 segments, du second n–1 encore, etc.... Il ajoute qu'en procédant ainsi chaque segment est compté deux fois. Cette procédure conduit pour le résultat final à $N_n = \frac{(n-1)n}{2}$.

Procédure 5. Faire le tour

L'élève compte méthodiquement les segments pour n points. Il commence par en compter n sur le pourtour de la figure. Ensuite à partir d'un point quelconque il en compte n–3, d'un autre point quelconque il en compte également n–3, puis n–4, puis n–5, etc..... Cette procédure conduit pour le résultat final à

$$N_n = n + 2(n-3) + (n-4) + ... + 1.$$

Procédure 6. Groupes de points

Pour dénombrer les segments formés à l'aide de n points, l'élève établit deux groupes de points, un de p points, l'autre de n–p et utilise ces deux résultats. Cette procédure conduit pour le résultat final à $N_n = N_p + N_{n-p} + p(n-p)$.

Procédure 7. Segments

Cette procédure est voisine de la 4 mais son début diffère. L'élève compte tous les couples de points, soit n^2, il enlève les couples composés du même point, soit n, puis précise qu'en procédant ainsi chaque segment est compté deux fois. Cette procédure conduit pour le résultat final à $N_n = \frac{n^2 - n}{2}$.

Recherche d'une relation à partir des premiers résultats du tableau.

Procédure 8. Proportionnalité

En observant le tableau de nombres, l'élève émet l'hypothèse que le nombre de points et le nombre de segments sont proportionnels. Il vérifie et rejette cette hypothèse.

Procédure 9. Accroissements proportionnels

En observant le tableau de nombres, l'élève émet l'hypothèse que l'accroissement du nombre de points et l'accroissement du quotient du nombre de segments par le nombre de points sont proportionnels. Cette procédure conduit pour le résultat final à $N_n = \frac{(n-1)n}{2}$.

Procédure10. Induction directe

En observant le tableau de nombres, l'élève émet une hypothèse autre que la proportionnalité qui est confirmée par les résultats qu'il peut contrôler. Cette procédure conduit pour le résultat final à un de ceux des procédures 1, 2, 3, 4.

Procédure 11. Représentation

L'élève qui a obtenu quelques résultats par comptage place dans un repère les points ayant pour abscisse le nombre n et pour ordonnée le nombre de segments.

Procédure 12. Fonction carrée

L'élève a conjecturé par un graphique que le nombre de segments était une fonction du second degré de n. Il cherche à partir de cas particuliers les coefficients du trinôme. Cette procédure conduit pour le résultat final à $f(n) = \frac{1}{2}n^2 - \frac{1}{2}n$.

Transformation d'une formule.

Procédure 13. Simplification par symétrie

L'élève qui a déjà un résultat à partir des procédures 2 ou 3, soit $N_n = 1 + 2 + 3 + ... + (n-1)$, soit $N_n = (n-1) + (n-2) + (n-3) + ... + 1$, veut réduire le nombre de calculs. Il y parvient en sommant les termes symétriques de la progression arithmétique.

Procédure 14. Simplification par regroupement

L'élève qui a déjà un résultat à partir des procédures 2 ou 3, soit $N_n = 1 + 2 + 3 + ... + (n-1)$, soit $N_n = (n-1) + (n-2) + (n-3) + ... + 1$, veut réduire le nombre de calculs. Il y parvient en regroupant les termes consécutifs de 1 à 9, puis de 10 à 19, de 20 à 29, etc..... et constate que les résultats 45, 145, 245, sont des termes d'une suite arithmétique.

Le classement que nous avons opéré sur ces procédures constitue une première tentative en vue d'établir une frontière nette entre les écrits pouvant être qualifiés de démonstrations et les autres. En effet, il nous a semblé que tous les travaux opérant uniquement sur les nombres, sans un retour sur le comptage, ne pouvaient constituer une preuve, ils relèvent exclusivement du passage au cas général à partir de cas particuliers. On constate que ce classement a priori ne permet pas d'établir des distinctions claires dans le cursus scolaire.

Enfin on peut relever le poids important de la procédure 10 qui consiste à délaisser à partir d'un certain rang le comptage pour céder la place au travail sur les nombres. Cette procédure conduit dans presque tous les cas à une conjecture correcte, non rejetée car le résultat n'est pas mis en défaut par les vérifications réalisées. Il est alors intéressant d'exhiber un contre exemple du type de l'énoncé qui suit.

On place n points sur un cercle, on les joint deux à deux, quel est le nombre de régions ainsi définies à l'intérieur du cercle ?

4.4. QUELQUES ÉLÉMENTS D'ANALYSE

Le nombre "n".

Au-delà de ces procédures, nous avons centré notre intérêt sur l'introduction du nombre n dans les copies, aussi bien pour les élèves ayant utilisé des procédés de comptage que pour ceux qui ont travaillé sur les nombres.

Le nombre "n" apparaît dans les copies à travers 5 formules différentes :

$N_n = 1 + 2 + 3 + ... + (n-1)$, $N_n = (n-1) + (n-2) + (n-3) + ... + 1$,

$N_n = \frac{(n-1)n}{2}$, $N_n = \frac{n^2 - n}{2}$, $N_n = n + 2(n-3) + (n-4) + ... + 1$.

On peut tout d'abord relever que les résultats concernant n points n'apparaissent pas dans toutes les copies. Lorsqu'elle est présente, l'introduction d'une généralisation prend des formes diverses.

La forme peut être verbale, à l'aide d'une phrase générale comme dans la copie de Rindra, 2nde :

On considère les points donnés et l'on prend un point et on le relie à tous les autres, on fait de même pour tous les autres points. Or dès qu'un point est relié aux autres le second point ne sera pas relié une seconde fois et ainsi de suite le troisième ne sera pas relié de nouveau avec les deux premiers.... jusqu'à ce qu'il reste 2 points et 1 segment possible.

Elle peut être symbolique, par l'intermédiaire d'une lettre, x, a, n ou autre comme dans la copie de Tcherno, 2nde :

Je prends donc un premier point parmi les n points.
Je sais qu'il y a n–1 segments dont une extrémité est ce point.
Je prends un deuxième point.
Je sais qu'il y a n–1 segments dont une extrémité est ce point.
Mais parmi les n–1 segments il y en a un que j'ai déjà compté, celui dont l'extrémité est le premier point. Donc il n'y en a que n–1–1 différents des premiers, donc n–2.
Et ainsi de suite jusqu'à ce qu'on arrive au dernier point et qu'il y ait n–n segments différents des précédents.

Parfois le problème de la généralisation est clairement posé comme dans la copie de Guilhem, 2nde :

108 ça fait beaucoup et même trop à compter. Mais figurez-vous que ce n'est pas 108 qui m'a posé le plus de problèmes ; c'est le nombre n !.....
Je n'ai jamais appris à compter jusqu'à n ! C'est tout de même un scandale.....
Il faudra que je le reproche à mon prof de maths.

Il poursuit :

Tout cela pour dire que je me résous dès les premiers instants à, bien évidemment, chercher une formule générale.

Démontré ou pas.

Les élèves ayant utilisé des procédés de comptage peuvent, en toute rigueur, démontrer leur résultat en généralisant leur raisonnement au cas de n points. Pour les autres, ayant travaillé sur les nombres, la seule preuve possible est un raisonnement par récurrence avec un retour sur la géométrie pour dégager la relation de récurrence. Un tel raisonnement ne peut être fourni à ce niveau.

Concernant le passage au cas général et la trace ou non d'une démonstration, on constate trois comportements différents :

① L'élève fait correctement le raisonnement pour quelques points et le refait ensuite pour n, montrant par là que son traitement des cas particuliers se généralise. Cette généralisation intervient parfois en fin de copie quand il doit raconter à un camarade comment il procède.

C'est le cas d'Aurélia, 2nde qui n'a traité que des cas particuliers et qui conclut ainsi son travail :

> *Et maintenant, mon cher Dupont, la cerise sur le Gâteau, nous allons exprimer ceci en cas général de n points.*
> *D'un point donné on peut tracer n–1 segments. Mais on a n points donc en tout n(n–1) segments. Comme tout à l'heure les segments se superposent on divise par 2*
> *Et on obtient quoi Dupont ?*
> *On obtient* $\frac{n(n-1)}{2}$ ..

② L'élève ne ressent pas la nécessité de faire correctement le raisonnement pour quelques points, après un bref comptage pour les premières valeurs de n, il le fait directement pour n quelconque. Ce raisonnement est parfois illustré par l'application simultanée à un cas particulier.

C'est le cas de Tcherno dont il est question plus haut qui commence sa copie par :

> *Après avoir pris quelques exemples simples (avec 3 points, 4 points, 2 points....) je passe au cas général.*

③ L'élève fait correctement le raisonnement pour quelques points et donne la formule conjecturée pour n. Parfois il la vérifie sur quelques cas et conclut à sa véracité.

La copie de Mélanie, 4ième :

> *Pour tracer un segment il faut nécessairement deux points. Puisqu'il nous faut tout d'abord calculer pour 5 points, le nombre de segments possibles à tracer, nous*

allons nommer ceux-ci par des lettres (A, B, C, D, E) et nous allons faire un tableau pour chercher ces segments

Mélanie réalise le tableau suivant :

AA	*AB*	*AC*	*AD*	*AE*
BA	*BB*	*BC*	*BD*	*BE*
CA	*CB*	*CC*	*CD*	*CE*
DA	*DB*	*DC*	*DD*	*DE*
EA	*EB*	*EC*	*ED*	*EE*

Elle poursuit :

Si on essaye de joindre A avec A c'est impossible de même que B et B, C et C, D et D, et E et E

Dans mon tableau il y a 5 colonnes et 5 lignes donc 25 réponses éventuelles moins les 5 solutions impossibles; Moins la $^1/_2$ soit ici les solutions identiques car AB = BA, AC = CA, AD = DA, AE = EA,

BA = CB, BD = DB, BE = EB, CD = DC,

CE = EC, DE = ED

Donc à partir de là nous pouvons établir une formule. Soit N le nombre de points. Nous avons $\frac{(N \times N) - N}{2}$ = *Nombre de segments*

Les comportements de type ① ou ② sont effectivement des preuves du résultat avancé. C'est à partir de la classe de 3ième que l'on peut les observer dans les copies.

Le comportement de type ③ ne peut être considéré a priori comme une preuve, même lorsqu'il est accompagné de vérifications. Pourtant..... on peut se demander si l'exemple, ici, ne peut pas avoir valeur de preuve, car la valeur choisie pour raisonner n'altère en rien la généralité du raisonnement.

Dans notre problème, le caractère de généralité se dégage de la figure. Dès qu'a été observé le procédé de génération des segments et le procédé de comptage qui s'en dégage, son caractère récurrent ne peut être mis en défaut. Que doit-on attendre des élèves ayant observé ce procédé de génération ? Autrement dit, une fois que les élèves ont perçu le caractère général qui peut être attribué à tout cas particulier, est-il nécessaire pour eux d'en établir la généralité ou bien leur suffit-il de constater qu'il n'est pas contredit ?

L'étude des comportements de type ③ pour lesquels la preuve semble absente, montre deux grandes tendances concernant la généralisation du mode de calcul lorsque celui-ci est effectué à partir d'une procédure de comptage et donc enraciné dans la géométrie. Illustrons par deux extraits de copies ces tendances.

La copie de Mélanie ci - avant et la copie de Jean, 4ième qui suit.

J'ai trouvé un moyen :

Il faut multiplier le nombre de points moins 1 puis diviser le résultat par 2.

Démonstration :

$$\frac{3\times 2}{2} = 3 \text{ ou } \frac{3\times(3-1)}{2} = 3$$

$$\frac{4\times 3}{2} = 6 \text{ ou } \frac{4\times(4-1)}{2} = 6$$

$$\frac{5\times 4}{2} = 10 \text{ ou } \frac{5\times(5-1)}{2} = 10$$

……

Donc pour calculer les gros nombres, je vais utiliser cette méthode

$$\frac{12\times 11}{2} = \frac{132}{2} = 66$$

$$\frac{20\times 19}{2} = \frac{380}{2} = 190$$

$$\frac{108\times 107}{2} = \frac{11556}{2} = 5778$$

Jean donne comme démonstration la vérification sur des cas pour lesquels il sait qu'elle fonctionne. Il raisonne par non-contradiction.

Mélanie donne sur un cas particulier un raisonnement présentant un caractère général irréfutable. On peut ici évoquer l'évidence du caractère général de son raisonnement et qualifier d'exemple générique[19] cette façon de valider le résultat.

Ces pratiques étant présentes à tous les niveaux de l'enseignement secondaire, nous avons là deux points d'appui concernant l'apprentissage de la démonstration. La phase de mise en commun et de correction doit montrer l'insuffisance du procédé de non contradiction et la relative faiblesse du procédé dégageant l'évidence du caractère général de quelques cas particuliers.

---

[19] Il s'agit du terme utilisé par N. BALACHEFF dans sa typologie des preuves.

4.5. CONCLUSION

Au travers des multiples procédures rencontrées dans ce type de problème, on peut penser que pour traiter les questions d'exhaustion on relève deux principales directions de travail :

- du particulier au général avec essai d'explication du général ;
- du particulier au général sans contradiction avérée lors du retour sur le particulier.

La première conduit à terme à la notion de preuve quand elle n'en est pas déjà une. C'est la nécessité d'une explication du cas général lorsque celle-ci est de même nature que les cas particuliers traités qu'il faut faire émerger.

Pour la deuxième, il nous faut amener les élèves à comprendre que dans ce passage du particulier au général vérifié par des exemples, l'utilisation d'un langage formel ne peut masquer l'absence d'une preuve. Nous devons donc dégager des situations pour lesquelles leur façon de faire sera mise en défaut.

Ce n'est pas pour autant que cela suffira, le travail effectué par les élèves de 1ère S le montre bien. Nous savons tous, pour avoir parfois cherché sans succès..... que toutes les conjectures sont dans un premier temps acceptables, surtout quand on ne peut les contredire (voir le grand théorème de Fermat par exemple). On doit accepter et même souhaiter que des élèves soient mis dans une situation de recherche et livrent de tels résultats ni démontrés ni contredits. C'est en montrant la multiplicité des approches, en privilégiant le débat que nous parviendrons à semer quelques doutes sur l'évidence et la non contradiction et que pourra surgir la nécessité de la preuve.

4.6. La copie de Guilhem, élève en seconde

Page 1

I) Confortablement installé à mon bureau, un certain jour de ce mois de février, je m'apprêtais gaiement (oui, gaiement) à me mettre à la recherche de cette narration. Après avoir griffoné au coin de ma feuille, (Je fais toujours cela à cause de l'angoisse de la page blanche), je traçais 1, puis deux, puis trois points ..., et au fur et à mesure que les points apparaissaient, je traçais tous les segments possibles, les dénombrant progressivement. Et je me disais : « peut-être que j'arriverai à le remplir, son tableau, avec cette méthode, mais qu'est-ce que je vais lui raconter sur ma feuille ! ? »

Mais je dus bien vite abandonner cette méthode. Et ceci à cause de deux nombres : le nombre 108 et le nombre n.

108, ça fait beaucoup, et même trop à compter. Mais figurez-vous que ce n'est pas là qui m'a posé plus de problèmes ; c'est le nombre n ! Ce petit nombre à un seul chiffre, que je n'ai même pas réussi à représenter sur ma feuille. C'est tout de même un scandale qu'un plus de 10 aurait de satisfaire, je n'ai jamais pris à compter jusqu'à n ! Il faudra que je le reproche à mon professeur de mathématiques, (pas de même !). Trêve de plaisanteries...

Tout cela pour dire que je me résolus dès les premiers instants à, bien évidemment, chercher une formule générale :

J'abandonnais bien vite la méthode consistant à obtenir les résultats pour en tirer une formule, trop hasardeuse à mon goût, et trouvais au bout de quelque temps ma méthode.

Et pour comprendre pourquoi cette méthode, il faut remonter quelques années auparavant.

Durant les longues journées de juillet, le goût du hasard, du fait, mais aussi des mathématiques nous poussait, avec mon cousin, à nous lancer à un jeu bien particulier, dénoncé (plus communément réinventé qu'inventé : à combien de brillants inventeurs ont-ils vous ainsi dans l'ombre, tout simplement parce qu'ils étaient nés après d'autres ?) Ce jeu consistait à organiser un championnat de France fictif, avec à la base des rencontres "parties". Il fallait alors trouver un moyen pour que toutes les équipes se rencontrent à fois chacune : pas si évident que ça... exemple facile : prenons pour pole de 4 équipes.

Au début, nous nous "jouions" ainsi :

1 contre 1
1 — 2
1 — 3
1 — 4
2 — 1
2 — 2
2 — 3
2 — 4
3 — 1
3 — 2
3 — 3
3 — 4
4 — 1
4 — 2
4 — 3
4 — 4

Chaque équipe rencontrait toutes les autres équipes : 4 on en était sûr. Si nous revenons à nos points, cela fait n x n possibilités.

Mais, bien sûr, nous nous rendîmes tout de suite compte que l'équipe 1, par exemple, "foulait" contre l'équipe 1 : inutile. Dans le cas présent, il faut donc enlever quatre matches : le 1 - 1, le 2 - 2, le 3 - 3, et le 4 - 4 ; en n, on doit

s'écrire comme ça : $n \times n - n$, ou $n(n-1)$.

Mais autre chose n'était pas : la législation demeurait toujours une épreuve de maths modernes (ou, si vous préférez, l'énoncé parlait de segments et non pas de vecteurs). Aussi, il fallut encore éliminer la moitié des matches, ce qui nous donnait finalement :

1 – 2
1 – 3
1 – 4
2 – 3
2 – 4
3 – 4

ou, en "n" : $\frac{n(n-1)}{2}$.

Eh bien ! Nous n'imaginions pas, alors, répondre à la question de recherche de M. Bonafé !

Fondaroque Guillem
(Tiré de l'ouvrage
"Des larmes aux rires",
9 mars 1337)

II) Pour expliquer le résultat à un copain, je m'y prendrais de la façon suivante : « Chaque point doit se lier avec tous les autres, sauf avec lui même bien sûr, sinon ce n'est pas un segment : il se lie donc avec n – 1 points. Or il y a n points, ça fait donc n(n – 1) segments. Mais en réalité, il y a deux fois moins de segment, car le segment AB, c'est la même chose que le segment BA. Il y aura donc, pour n points, $\frac{n(n-1)}{2}$ segments. »

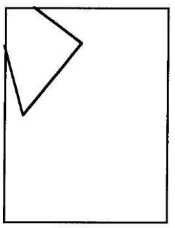
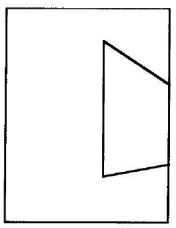
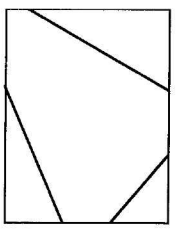
Page 4

Si j'ai ---	Je peux tracer au plus ---
1 point	0 segment
2 points	1 segment
3 points	3 segments
4 points	6 segments
5 points	10 segments
6 points	15 segments
7 points	21 segments
12 points	66 segments
20 points	190 segments
108 points	5778 segments
n points (n est un entier positif)	$\frac{n(n-1)}{2}$ segments

5. CENTRE DE GRAVITÉ

5.1. ÉNONCÉ

Chacune des trois figures suivantes représente une feuille de papier sur laquelle est dessiné un triangle incomplet. Construire dans chaque cas le centre de gravité du triangle sans réaliser de tracé à l'extérieur de la feuille.

Figure 1	Figure 2	Figure 3
		

Remarque.

Les trois figures doivent pouvoir présenter des méthodes de résolution différentes. Ainsi, la figure 1 donne l'accès à deux médianes via le théorème des milieux dans un triangle. Cette méthode de traitement est inapplicable pour la figure 2 qui comme la première peut être réglée par une isométrie.

La figure 3 invite à un jeu de réductions et agrandissements qui nécessite de faire appel, pour établir une preuve, aux configurations associées au théorème de Thalès.

Il est souhaitable que les consignes de travail invitent les élèves à s'intéresser d'abord au cas de la figure 1, puis de la figure 2 et enfin de la 3. Pour être certain d'obtenir des résultats sur les isométries on peut remplacer la figure 3 par une autre du même type que la deuxième pouvant être traitée par une réflexion mais pas par les théorèmes des milieux.

Il est parfois nécessaire de préciser que le centre de gravité est associé aux médianes afin d'éviter les constructions de médiatrices, hauteurs ou bissectrices.

Ce travail peut être réalisé en classe. Dans ce cas il faut prévoir deux heures si l'on souhaite que de nombreux élèves abordent les trois cas et les rédigent correctement.

5.2. Objectifs

De la 5ème à la 1ère, ce travail va faire appel aux connaissances (explicites ou non) des élèves sur les transformations et sur le théorème de Thalès. Il peut donc présenter deux objectifs de natures différentes.

- Simple bilan de contrôle après l'étude de quelques transformations avec un nécessaire débordement vers agrandissement et réduction.
- Travail d'introduction à une synthèse sur les transformations connues des élèves avec un nécessaire débordement vers agrandissement et réduction.

5.3. Méthodes de recherche des élèves

Nous avons travaillé ce sujet (sous diverses formes) avec différentes classes de la 5ème à la 2nde. L'homothétie n'apparaissant aujourd'hui que dans les programmes de 1ère, il nous semble que ce travail peut être repris à ce niveau.

On relève quatre directions différentes dans les recherches des élèves.

- L'utilisation du théorème des milieux pour tracer au moins une médiane.
- L'introduction (consciente ou non) d'une isométrie afin de disposer d'un triangle complet (nous n'avons pas noté les instruments d'accès à ces isométries bien que ceux-ci ne soient pas sans influence sur la construction en retour du centre de gravité).
- La reconnaissance d'une configuration particulière autre que celle des milieux.
- L'utilisation consciente d'une réduction du triangle incomplet.

Chacune de ces directions fait référence à un certain nombre de procédures énoncées ci-dessous. Nous n'avons pas reproduit toutes celles concernant par erreur les autres droites du triangle. De même, nous n'avons pas retenu quelques procédures calculatoires (calcul d'angles, de longueurs) particulièrement en évidence au collège où les nombres et les mesures apparaissent parfois comme sécurisants.

Avec les milieux.

Procédure 1. Milieux et médianes.

L'élève observe que le milieu d'un côté est accessible. Il trace par ce milieu les parallèles aux autres côtés et repère ainsi les milieux des deux autres côtés. Cela lui permet de tracer deux médianes.

Procédure 2. Milieu, médiane et position.

L'élève observe que le milieu d'un côté est accessible. Il trace par ce milieu la parallèle à un autre côté et repère ainsi le milieu d'un des deux autres côtés. Cela lui permet de tracer une médiane. La connaissance de la position du centre de gravité sur une médiane lui permet de conclure.

Avec les isométries.

Procédure 3. Réflexion.
À l'aide des instruments l'élève construit deux segments symétriques des côtés incomplets par rapport au côté complet. Il construit le centre de gravité du nouveau triangle et le reporte ensuite dans le triangle incomplet.

Procédure 5. Symétrie centrale.
À l'aide des instruments l'élève construit deux segments symétriques des côtés incomplets par rapport au milieu du côté complet. Il construit le centre de gravité du nouveau triangle et le reporte ensuite dans le triangle incomplet.

Procédure 6. Translation.
À l'aide des instruments l'élève construit l'image du triangle incomplet par une translation qui lui permet de le voir entièrement sur la feuille. Il construit le centre de gravité du nouveau triangle et le reporte ensuite dans le triangle incomplet.

Procédure 7. Rotation.
À l'aide des instruments l'élève construit l'image du triangle incomplet par une rotation (le centre est souvent un des sommets visibles du triangle) qui lui permet de le voir entièrement sur la feuille. Il construit le centre de gravité du nouveau triangle et le reporte ensuite dans le triangle incomplet.

Procédure 8. Mauvais retour.
À l'aide des instruments l'élève construit l'image du triangle incomplet par une isométrie qui lui permet de le voir entièrement sur la feuille. Il construit le centre de gravité du nouveau triangle et le reporte ensuite dans le triangle incomplet en utilisant une isométrie différente de la réciproque de la première.

Avec des configurations.

Procédure 9. Le parallélogramme.
À l'aide des instruments l'élève construit par les sommets visibles des parallèles aux côtés opposés incomplets. Il observe un parallélogramme incomplet dont il connaît une diagonale et par conséquent le centre. Il trace l'autre diagonale et observe qu'il s'agit d'une médiane du triangle. (Ce travail le renvoie parfois sur la symétrie centrale.)

Procédure 10. Les parallèles.
À l'aide des instruments l'élève choisit un sommet visible et le côté opposé. Il construit un segment parallèle à ce côté joignant les deux autres côtés. Il trace la droite qui joint son milieu et le sommet retenu et affirme qu'il s'agit d'une médiane du triangle. (La répétition de ce travail conduit à une solution.)

Procédure 11. Sommet et parallèle.
À l'aide des instruments l'élève construit deux segments parallèles à un des côtés joignant les deux autres côtés. Il trace la droite qui passe par leurs milieux et affirme

qu'il s'agit d'une médiane du triangle. (La répétition de ce travail conduit à une solution.)

Réductions et agrandissements.

Procédure 12. Réduction.
À l'aide des instruments, l'élève choisit un sommet visible et le côté opposé. Il construit un segment parallèle à ce côté joignant les deux autres côtés. Il affirme qu'il a construit une réduction du triangle ("le même en plus petit"). Il construit le centre de gravité de ce triangle et le reporte dans le grand en utilisant la médiane commune.

Procédure 13. Pseudo - réduction.
À l'aide des instruments l'élève construit trois parallèles aux côtés du triangle à une distance constante de ces trois côtés. Il obtient un triangle plus petit, construit son centre de gravité et affirme qu'il s'agit également de celui du triangle incomplet.

Procédures calculatoires.

Il s'agit de procédures qui sont plus particulièrement vues au collège où les nombres et les mesures sont sécurisants.

Procédure 14. Calcul du troisième angle.
Lorsque deux angles sont visibles, l'élève les mesure au rapporteur et calcule le troisième angle.

Procédure 15. Calculs de longueurs.
Après avoir effectué diverses mesures, l'élève effectue des calculs des longueurs mettant en jeu le théorème de Pythagore ou la trigonométrie.

5.4. QUELQUES ÉLÉMENTS D'ANALYSE

Le vocabulaire des transformations.

La nature du problème –une partie du triangle est à l'extérieur de la feuille– invite à faire rentrer le triangle dans la feuille. De nombreuses procédures montrent que c'est bien cette voie qui a été suivie. Il est agréable de constater que dans de très nombreux cas, l'utilisation de transformations est consciente et le vocabulaire associé tout à fait correct. C'est le cas d'Alexia, 2nde :

Pourquoi ne pas essayer de retracer le triangle avec la rotation en prenant comme centre un point que je connais....
Je fais la rotation de centre B et d'angle 130° pour obtenir les images des deux droites....
J'ai obtenu ce que je voulais, c'est-à-dire l'image du triangle par rotation....

Je vais maintenant essayer par la symétrie axiale par rapport au côté connu pour trouver l'image de G....

C'est également le cas de Nicolas, 2nde pour qui tout est très clair malgré quelque maladresse de vocabulaire :

Dans la symétrie centrale à I on a G' α G, et G est le centre de gravité....
En fait le problème serait clair si le dessin était au milieu de la feuille d'où me vient l'idée de translater le triangle suivant $\vec{V}$ à l'intérieur de la feuille, le nouveau triangle aurait pour centre de gravité l'image du centre de gravité du premier triangle.

On trouve d'ailleurs de nombreuses maladresses du même type, comme dans la copie de Pierre, 4ième :

J'ai essayé de plier ma feuille....
Je devais donc dessiner la symétrie de ABC par rapport à (AC).
J'ai essayé de dessiner la symétrie de ABC par rapport au point X....

Lorsque le vocabulaire leur fait défaut, les élèves ont recours au terme de "projection" qui renvoie lui même à une création d'image à proximité. C'est le cas de Anne, 2nde, qui propose de réaliser une translation et qui a sans doute oublié le vocabulaire :

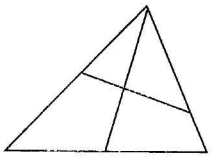
On obtiendrait alors A'B'C' qui serait une sorte de projection de ABC, un autre triangle identique de ABC mais sur autre partie de la feuille....

Concernant les réductions et agrandissements, le vocabulaire, par contre, fait défaut et lorsque le cas se présente, c'est "le même en plus petit" qui est construit. Lorsque cela se passe dans un des coins visibles du triangle, on ne retrouve plus d'allusion au "même" triangle. Cette façon de procéder renvoie à certaines propriétés de la médiane que nous allons examiner.

Une propriété ignorée de la médiane.

Les procédures 10 et 11 reposent sur la propriété suivante : la médiane relative à un côté partage en deux parties égales tout segment qui est parallèle à ce dernier et dont les extrémités sont sur les deux autres côtés. Cécile, 2nde, entrevoit ce résultat sans pouvoir le prouver :

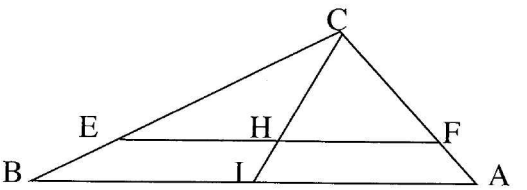
Je me suis intéressée à la partie manquante du dessin qui forme un triangle. Je me demandais si la médiane d'un triangle inclus dans un autre serait la même que celle de l'autre. J'ai essayé et j'ai obtenu une réponse négative.



Son texte est accompagné de la figure ci-contre. Elle poursuit sa recherche et écrit :

J'ai alors pris comme triangle inclus un triangle dont la base était parallèle à celle de l'autre triangle. Je me suis aperçue que dans ce cas là, la médiane du plus petit triangle était celle du plus grand, car les milieux de toutes les parallèles à un côté du triangle sont alignés avec le sommet opposé.

Charles, 2nde, entrevoit également ce résultat. Il place des lettres sur la figure comme ci-dessous :



Il poursuit :

Je prouve maintenant que la médiane issue de C coupe [EF] en H milieu de [EF].

(EF)//(BA) donc d'après le théorème de Thalès, $\frac{CE}{CB} = \frac{CF}{CA} = \frac{EF}{BA}$.

Dans le triangle CIB, (EH)//(BI) donc d'après le même théorème $\frac{EH}{BI} = \frac{CE}{CB}$.

Dans le triangle CIA, (HF)//(IA) donc $\frac{HF}{IA} = \frac{CF}{CA}$.

$\frac{EH}{BI} = \frac{CE}{CB}$ *et* $\frac{HF}{IA} = \frac{CF}{CA}$, *or* $\frac{CE}{CB} = \frac{CF}{CA}$, *donc* $\frac{EH}{BI} = \frac{HF}{IA}$ *et comme I est milieu de [BA] alors H est milieu de [EF].*

Charles a bien établi une preuve de la propriété proposée plus haut, propriété qui pourra être reprise et généralisée plus tard avec l'homothétie.

5.5. CONCLUSION

Que ce travail intervienne comme une introduction à une synthèse sur les transformations ou comme un bilan de contrôle après l'étude de quelques transformations, il met en évidence :

- Une utilisation massive des transformations avec un vocabulaire associé souvent correct.
- Une utilisation systématique des lettres pour désigner les objets géométriques étudiés.
- La connaissance explicite ou non de certains invariants des transformations utilisées (le centre de gravité de l'image est l'image du centre de gravité).

Les questions de preuve sont rarement abordées dès qu'une transformation est présente (dans tous les cas utilisant une transformation, la solution passe par la construction de l'image du triangle, du centre de gravité de cette image et de l'image de cette dernière par la transformation réciproque). On peut noter que l'utilisation d'une transformation intervient parfois dans une deuxième phase de travail, après l'adjonction de divers éléments à la figure.

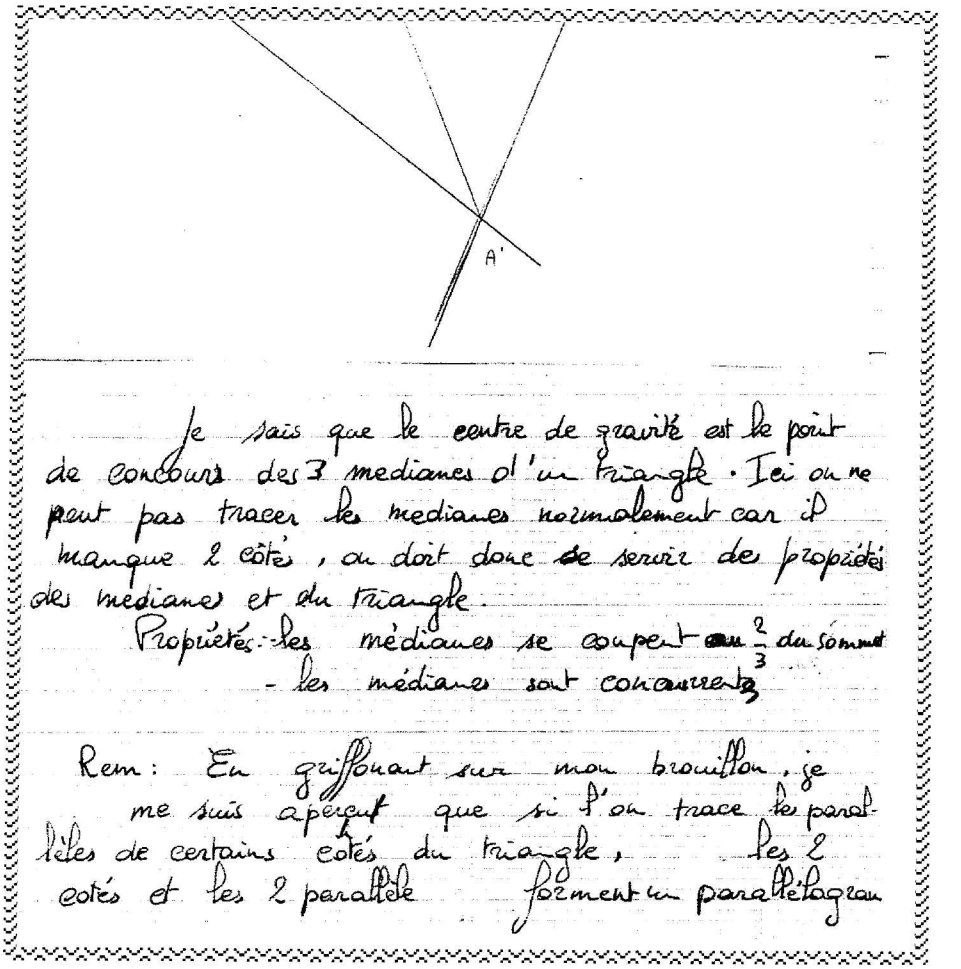
Par contre, l'utilisation d'autres procédures renvoie souvent des éléments de démonstration, qu'il s'agisse de l'utilisation des théorèmes des milieux ou, plus généralement du théorème de Thalès. La phase du compte rendu offre la possibilité d'un travail approfondi autour du théorème de Thalès et de la propriété des médianes énoncée plus haut.

Concernant la troisième figure, il est à noter que la procédure de pseudo - réduction est très fréquente. Cela soulève des difficultés dès qu'il s'agit de convaincre les élèves qu'elle conduit à une erreur. La solution qu'elle offre est peu éloignée du centre de gravité et il faut avoir recours à des contre-exemples (grâce à un logiciel de géométrie par exemple) pour parvenir à convaincre.

5.6. La copie de Nicolas, élève en seconde

Il est à noter qu'il s'agit d'un travail en temps limité : deux heures sous surveillance.

Page 1



me et le 3^{em} côté une diagonale du parallélogramme

Autre Remarque : la mediane qui passe par le 3^{em} côté est la 2de diagonale car elle passe par le milieu de la 1er diagonale, par le sommet du triangle (Par hypothèse) et par le sommet du triangle construit par symetrie.

Ensuite je chercherai sur la diagonale le centre de ~~symetrie~~ gravité par la loi des $\frac{2}{3}$

Plus mathématiques, on demontre :

* Dans le dessin 1/

Le triangle ABC n'est pas entierement représenté : le point A est hors du dessin

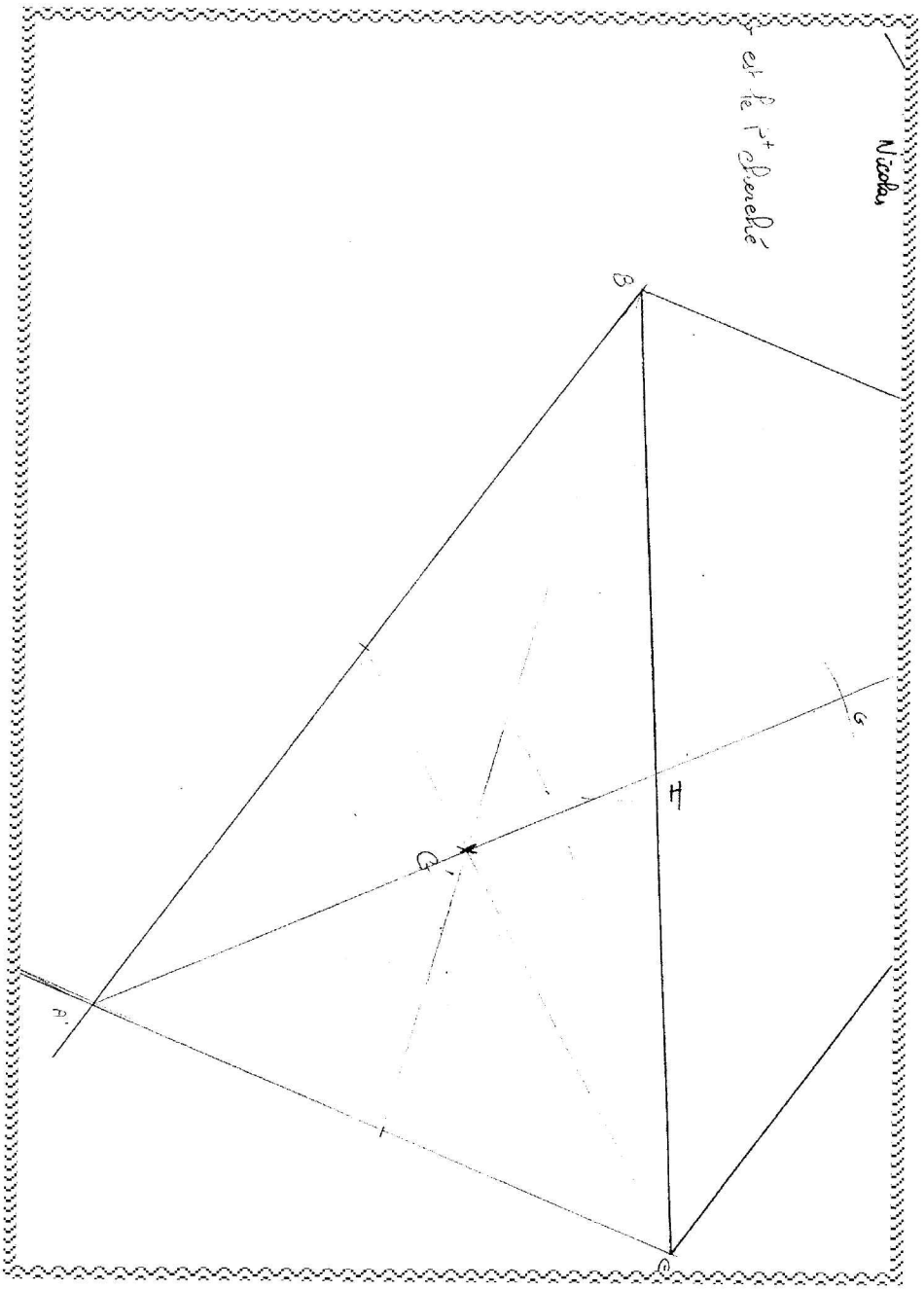
* - Soit la parallèle Δ de [AC] qui passe par B
" " " " Δ' de [AB] " " " C

- Δ et Δ' se coupe en A'.

* Dans le quadrilatère ABA'C on a (BA') // (CA) et (CA') // (BA) donc ABA'C est un parallélogramme et donc [AA'] et [BC] se coupent en leur milieu I.

* Dans ABC, (AI) coupe [BC] en son milieu et passe par A donc [AI] est la mediane issue de A

Page 3



* Dans le triangle BCA' le centre de gravité G' est au $\frac{2}{3}$ de la distance de la médiane [A'I] en partant de A' et au $\frac{1}{3}$ en partant de I

* Dans la symétrie centrale à I sur la droite (AA') on a $G' \mapsto G$
G le centre de gravité de ABC car D est au $\frac{1}{3}$ de I sur la mediane [AI] issue de A

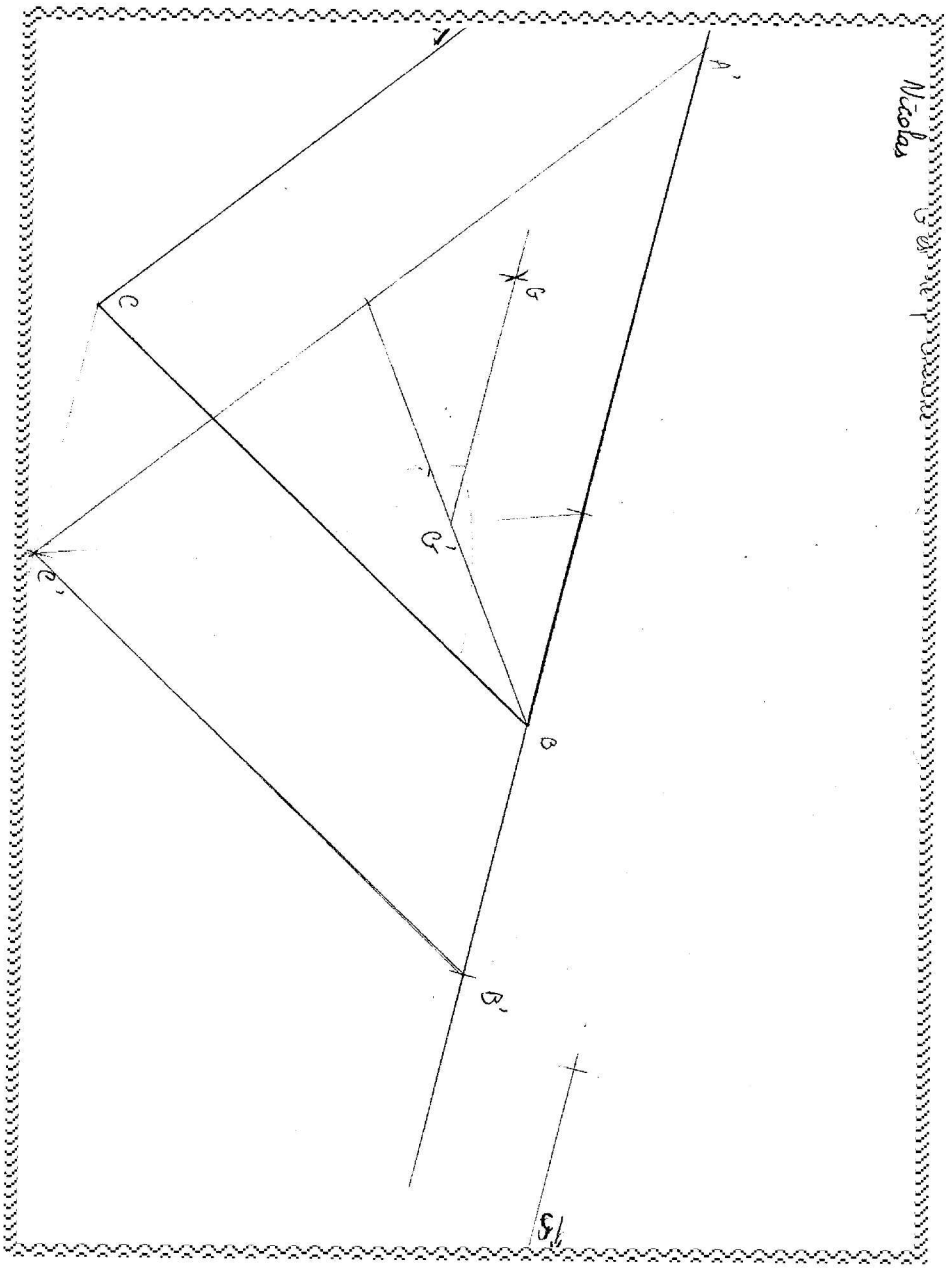
J'essaye de faire demême dans l'dessin mais les bords sont trop proches et le dessin ne rentre pas donc il y a un autre solution à chercher

En fait, le problème serait clairé si le dessin était au milieu de la feuille d'où me vint l'idée de translater le triangle suivant $\vec{v}$ à l'interieur de la feuille, le nouveau triangle aurait pour centre de gravité l'image du centre du gravité du premier triangle.

× Dans le Dessin 2
Soit I le milieu de [BC]
Soit G le centre de gravité de ABC
Dans la translation de $\vec{v}$

$A \longmapsto A'$ $\quad G \longmapsto G'$
$B \longmapsto B'$ $\quad I \longmapsto I'$
$C \longmapsto C'$

Page 5



Page 6

Dans la translation $\vec{v}$ comme $G \in (AI)$
alors $G' \in (A'I')$

Comme la projection conserve les proportions
et $\frac{1}{3}AI = GI$ alors $\frac{1}{3}A'I' = G'I'$

Alors G' est le centre de gravité de $A'B'C'$

6. CINQ, QUATRE, TROIS, DEUX, UN[20]

6.1. ÉNONCÉ

A et B sont deux points donnés. On souhaite construire en utilisant seulement une règle non graduée (dont les extrémités sont rongées...) et un compas, le point C vérifiant les trois conditions suivantes :

1) $C \in (AB)$ 2) $C \notin [AB]$ 3) $AC = \frac{1}{4}AB$

Quel est le nombre minimum d'arcs de cercles (ou de cercles) qu'il est nécessaire de tracer ?

6.2. OBJECTIFS

De la 3ème à la 1ère, ce travail fait appel aux connaissances des élèves sur les cercles et médiatrices, puis sur le théorème de Thalès et différentes configurations.

Selon la classe et selon le moment choisi par l'enseignant, il peut répondre à deux objectifs différents :

- Simple bilan de contrôle de connaissances sur certaines configurations avec débordement vers de nouvelles configurations.
- Travail d'introduction de certaines configurations.

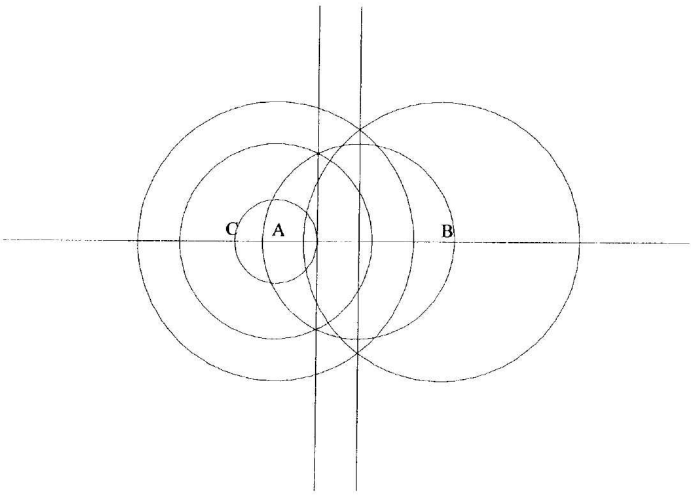
Comme tout problème de géométrie, ce travail a aussi pour objectif de consolider l'apprentissage de la démonstration.

---

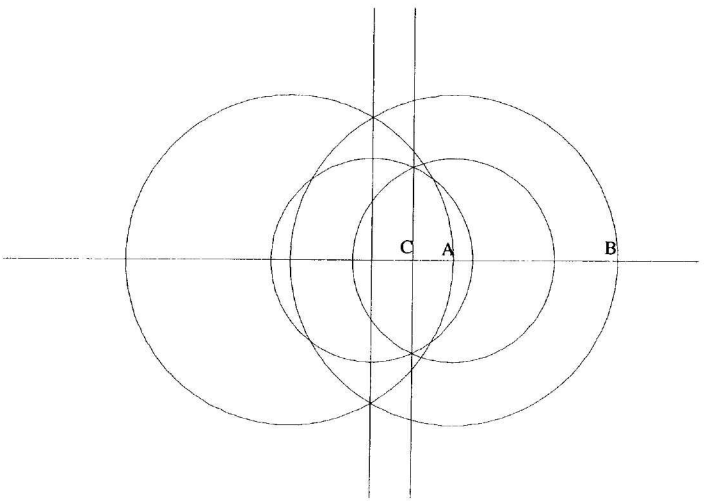
[20] On doit cet énoncé à M. CRITON, A. GUILLEMOT et F. GUTMACHER. Il a paru dans la revue *Tangente* sous le titre : "Quatre, trois, deux, un,...., zéro !"

6.3. Quelques solutions du problème

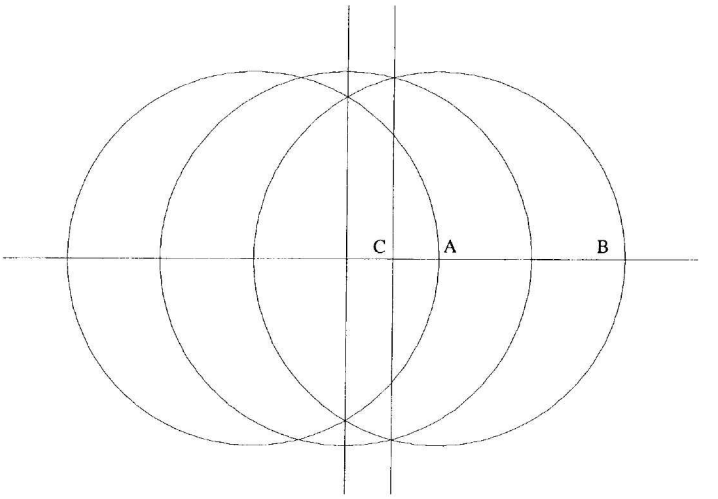
En 5 cercles avec utilisation de médiatrices et report



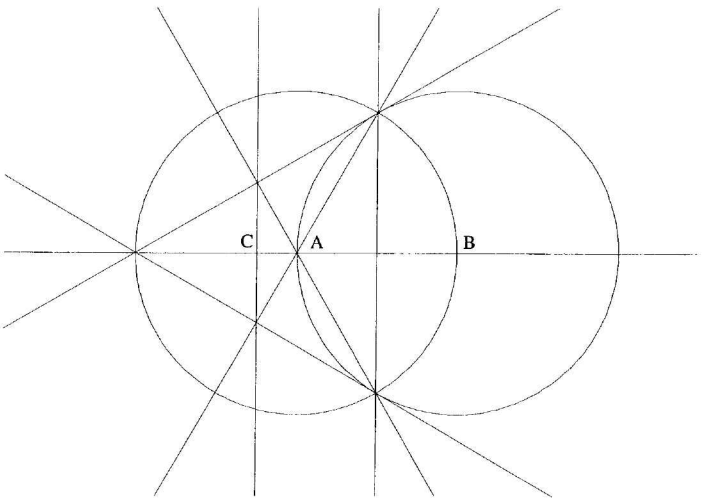
En 4 cercles avec utilisation de médiatrices à l'extérieur de [AB]



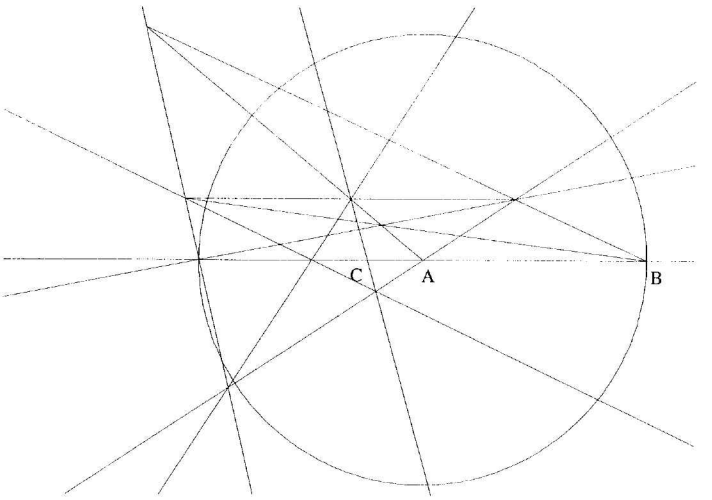
En 3 cercles avec utilisation de médiatrices à l'extérieur de [AB] et cercles de même rayon



En 2 cercles avec triangle équilatéral et médianes



En 1 cercle à l'aide des propriétés du trapèze complet



6.4. MÉTHODES DE RECHERCHE DES ÉLÈVES

On relève quatre types de recherches :

- Le non respect des consignes, ou l'utilisation, explicite ou non de matériel non autorisé, conduit à des procédures erronées.
- L'utilisation de la médiatrice ou du théorème de Thalès conduit à des procédures classiques : l'une d'elles (n°6) permet d'obtenir un tracé en 5 cercles et sert très souvent de déclencheur pour tenter de réaliser des économies de cercles.
- A partir de la procédure n°6, les élèves réduisent progressivement le nombre de cercles en utilisant plusieurs fois des cercles déjà tracés ce qui leur permet d'obtenir un tracé en 4 ou 3 cercles.
- Pour obtenir un tracé en 2 cercles, les élèves utilisent des configurations (triangles équilatéraux, rectangles, hexagones réguliers, triangles semblables...) qu'ils obtiennent en construisant un quadrillage, ou en utilisant directement une configuration, ce qui leur fait réaliser une économie de traits sur la figure.

Procédures erronées.

Procédure 1. Erreur sur les consignes.

L'élève place les points A et B après la réalisation d'une graduation régulière.

Procédure 2. Au jugé.
L'élève trace des tangentes à un cercle au jugé ou une perpendiculaire à une droite donnée en utilisant le quadrillage de la feuille.

Procédure 3. Erreur sur les contraintes de matériel.
L'élève utilise les bords parallèles de la règle.

Procédure 4. Rectangles au jugé.
Sur le cercle de centre A et de rayon AB, l'élève place deux points E et F de telle sorte que AEE'B' et AFF'B' (avec B' symétrique de B par rapport à A) soient des rectangles. En observant les divers points d'intersection des côtés et diagonales des rectangles, il propose une position du point C.

Procédures classiques.

Procédure 5. Échelle régulière.
L'élève réalise une échelle régulière en utilisant une droite auxiliaire et le théorème de Thalès.

Procédure 6. Med - med.
L'élève trace la médiatrice de [AB] et son milieu I, puis la médiatrice de [AI] et son milieu J; il reporte alors la longueur AJ, pour obtenir C en **5 cercles**.

Recherche d'économies sur la procédure à 5 cercles classique.

Procédure 7. Med - med avec économie.
L'élève trace la médiatrice de [AB] et un cercle va servir deux fois pour obtenir **4 cercles** avec report du dernier milieu.

Procédure 8. Symétrique.
La construction se réalise à l'extérieur de [AB] (du côté supposé de C). L'élève trace la médiatrice de [AB'] où B' est le symétrique de B par rapport à A et son milieu I', puis la médiatrice de [I'A] pour une solution en **4 cercles**.

Procédure 9. Symétrique avec économie.
La construction se réalise à l'extérieur de [AB] (du côté supposé de C). L'élève trace la médiatrice de [AB'] où B' est le symétrique de B par rapport à A et son milieu I', puis la médiatrice de [I'A] en utilisant un cercle déjà tracé pour une solution en **3 cercles**.

Utilisation d'une configuration à l'aide ou non d'un quadrillage.

Procédure 10. Quadrillage puis losanges.
La construction se réalise à l'extérieur de [AB] (du côté supposé de C). L'élève trace la médiatrice de [AB'] où B' est le symétrique de B par rapport à A et son milieu I'. Comme le rayon des cercles est AB, les points obtenus donnent des triangles équilatéraux puis hexagones réguliers. D'où, la construction d'un quadrillage à base de losanges ou de rectangles pour une solution en **2 cercles**.

Procédure 11. Triangle équilatéral.
La construction se réalise en partie à l'extérieur de [AB] (du côté supposé de C). L'élève trace la médiatrice de [AB]. Comme le rayon des cercles est AB, les points obtenus donnent un triangle équilatéral de centre de gravité A. De là, construction de C en **2 cercles** en utilisant la droite des milieux.

Procédure 12. Triangles semblables.
La construction se réalise à l'extérieur de [AB] (du côté supposé de C). L'élève trace la médiatrice de [AB'] où B' est le symétrique de B par rapport à A et son milieu I'. Comme le rayon des cercles est AB, les points obtenus donnent des triangles équilatéraux puis des hexagones réguliers. Le choix de deux bons triangles semblables donne C en **2 cercles**.

6.5. QUELQUES ÉLÉMENTS D'ANALYSE

Les déclencheurs d'économies.

Nota. Les extraits de copies que nous présentons proviennent de classes de 1ère S.

Comme nous l'avons vu précédemment, la procédure 6 en 5 cercles, quasi incontournable, sert de point de départ pour réaliser les premières économies de cercles, certains cercles servant plusieurs fois. C'est ce que nous constatons dans la copie de Céline :

> *Puis , à force de regarder la figure, j'ai constaté que je pouvais éliminer un arc de cercle pour tracer les médiatrices.*
> *J'ai refait exactement la même chose que dans la figure précédente sauf que pour tracer les médiatrices de [AB] et de [AO], j'ai gardé le même écartement du compas. En fait, l'arc de cercle M m'a servi deux fois, une fois pour tracer la médiatrice de [AB], et une autre fois pour tracer la médiatrice de [AO].*

La même idée, également sous-tendue par une information concernant la possibilité de minorer encore le nombre de cercles, permet à Grégory d'écrire ce qui suit :

> *Sachant qu'il est possible de résoudre le problème avec trois arcs de cercle, je me suis demandé si en gardant cette méthode, je pouvais réduire le nombre de cercles utilisés. J'ai remarqué que j'avais tracé deux arcs de cercles de rayon différents de centre A. Pourquoi ne pas prendre le même rayon? D'où un seul cercle de centre A à tracer.*
> *En tout, j'ai donc utilisé 4 arcs de cercle.*

Cette utilisation d'un même cercle plusieurs fois conduit à des tracés en 4 ou 3 cercles. Pour réduire encore le nombre de cercles, l'utilisation du symétrique de B par rapport à A, ou si l'on préfère le tracé à l'extérieur du segment AB s'avèrent profitables.
C'est ce que nous montre à nouveau la copie de Grégory :

J'ai donc ramené ma réflexion à la méthode précédente pour voir si je pouvais passer de 4 à 3 cercles. Le problème, avec cette méthode, c'est que j'obtiens le $^1/_4$ de [AB] sur le segment [AB]. Puis il me faut le reporter à l'extérieur du segment [AB], ce qui nécessite un arc de cercle supplémentaire.
Il me faudrait arriver à obtenir le $^1/_4$ de [AB] voire la moitié, toujours à partir de A, mais à l'extérieur du segment [AB].D'où ma nouvelle méthode :

Dans la méthode qu'il détaille alors, Grégory ne s'appuie pas explicitement sur la symétrie de centre A alors que Mathilde et Béatrice y font de suite référence avec leur vocabulaire plus ou moins explicite :

Après avoir fait cette première méthode, j'ai eu une idée : pourquoi ne pas, dès le début travailler sur (AB'), avec B' image de B par rapport à A ?
J'ai tout d'abord tracé un cercle de centre A et de rayon [AB]. Ce cercle a pour diamètre [BB']. AB = AB'. Par B' je trace un cercle de rayon [AB] ……."
"Pour supprimer un arc de cercle, il faudrait éviter d'avoir à tracer le symétrique à la fin. On trace un cercle de centre A et de rayon AB, et de diamètre BB'……
J'ai pensé à utiliser la symétrie afin d'éviter certains cercles.

Pour aller plus loin dans la recherche du minimum de cercles du tracé, les élèves doivent faire appel à de nouvelles méthodes et en particulier à des configurations ; il y a ici une rupture avec les méthodes précédentes, ce qui comme on va le voir avec la copie de Simon, demande un certain temps de réflexion et de travail :

J'ai enfin trouvé une solution en 2 arcs de cercle(j'ai mis une heure à trouver cette solution !).
Seul petit problème : je ne sais pas pourquoi ça marche...Enfin, pour l'instant.
Voici comment on fait cette solution :
On trace un cercle C de centre A et de rayon AB; on trace un cercle C' de centre B et rayon AB.
Aux intersections de ces deux cercles, on obtient D et E. On trace ensuite le losange AEBD ; On projette ensuite D sur C par rapport à A et on obtient le point D'. On fait pareil pour E afin d'obtenir E'.

On trace ensuite les rectangles BE'FE (F est le point d'intersection entre (AB) et C, différent du point B) et BDFD'. On peut enfin se rendre compte que (DF) et (EE') sont sécantes en un point G, et (FE) et (DD') se coupent en H. On trace la droite (GH). Et ... l'intersection entre (GH) et (AB) forme le point C.

Simon a utilisé un quadrillage à base de losanges et rectangles, qui lui permettra d'exhiber deux triangles semblables dans sa démonstration. Baptiste a, lui, construit un quadrillage qui lui a permis de reconnaître un hexagone régulier et des rectangles qui lui donneront également une solution en 2 cercles.

J'ai cherché plus d'une heure avant d'établir la figure suivante :
la figure se situe dans le cercle de centre A et rayon AB : C. En traçant les intersections de ce cercle avec le cercle de centre B et de même rayon, on obtient la médiatrice (MN) de [AB].L'image de M sur C par rapport à A est L et l'image de N sur C par rapport à A est K...

Baptiste continue alors la description de la figure tout en démontrant les différentes étapes comme nous le verrons au 6.5. Il termine en construisant le point C intersection des diagonales du rectangle KPQL, où P et Q sont les milieux respectifs des segments [KM] et [LN].

Olivia nous montre à sa façon la difficulté à surmonter pour obtenir un tracé en 2 cercles :

Ici, l'intervention de mon père m'a été d'une aide précieuse! On trace comme à la première étape 2 arcs de cercles pour déterminer le milieu I de [AB]……
Donc A se trouve aux 2/3 de B'I (en partant de B' symétrique de B par rapport à A).
Le "2/3" nous fait penser à la position du centre de gravité d'un triangle sur une médiane : il se trouve aux 2/3 de la médiane en partant du sommet……

Elle trace alors un triangle équilatéral puis le triangle de ses milieux dont l'un des milieux des côtés est le point C cherché.

La démonstration.

L'un des objectifs sans cesse poursuivi dans un problème de géométrie est l'apprentissage de la démonstration. Dans ce problème, un bon nombre d'élèves de 1ère S obtiennent assez rapidement des tracés en 4 ou 3 cercles . Ceux-ci étant justifiés par des propriétés simples des symétries ou des médiatrices, peu d'élèves établissent des démonstrations.

Nous avons donc porté notre attention sur les copies d'élèves dont les tracés mettent en jeu des configurations. C'est le cas de Karelle dont les constructions ne semblent pas raisonnées et qui constate son impuissance à démontrer.

J'ai tracé deux cercles, de centre A et B, puis j'ai tracé des traits, sans avoir si ça allait servir à quelque chose. Puis j'ai tracé la droite D, et ça faisait $^1/_4$ de AB, donc j'ai reporté la longueur à gauche.
Ensuite, j'ai remarqué que je pouvais faire la même chose avec un arc de cercle en moins(celui pour reporter la longueur).
Je n'ai pas réussi à prouver que $AC = \frac{1}{4}AB$.

En fait, Karelle décrit déjà très mal sa construction, puisque après avoir tracé la médiatrice du segment [AB], elle obtient grâce à la symétrie de centre A le triangle équilatéral de la procédure 11 dont un côté est pourtant manquant. Mais, rien dans sa rédaction ne fait référence à cette transformation et à cette configuration. On peut toutefois noter, qu'elle a conscience de ne pas "*prouver que* $AC = \frac{1}{4}AB$ ".

Stéphanie utilise la même procédure avec cette fois des tracés raisonnés qui la conduisent à une figure complète qu'elle ne fait que décrire. Elle ébauche seulement la rédaction de la démonstration et s'arrête bien vite.

J'ai tracé 2 cercles de rayon [AB] et de centres A et B.
(MM') est la médiatrice de AB, donc (MM') $\perp$ *(AB). (AB) coupe* $\mathcal{C}$ *en P. J'ai tracé les droites (PM) et (PM'): [PM] = [PM']. Puis j'ai tracé (AM) et (AM'). En traçant la droite (EE'), on obtient le point C sur (AB) tel que* $AC = \frac{1}{4}AB$.
Demonstration : PMM' est un triangle isocèle.[PE] = [PE'], (EE') $\perp(AB)$.

Pour ces deux premiers élèves, la configuration du triangle équilatéral ainsi que le théorème de Thalès dans sa version droite des milieux ne semblent toujours pas acquis.

Pour Baptiste, que nous avons déjà évoqué, la description du tracé et la démonstration s'élaborent en se répondant : (suite de l'encadré du 6.5)

Comme A est le centre de $\mathcal{C}$*, et BD est un diamètre de* $\mathcal{C}$*, alors l'image de la médiatrice (MN) sur* $\mathcal{C}$ *par symétrie de centre A est la médiatrice (KL) de [DA].*
Les triangles BDN et DBL sont rectangles car ils sont constitués d'un diamètre de $\mathcal{C}$ *et d'un autre point de* $\mathcal{C}$*.....*

Cela signifie que les triangles DBL et BND sont égaux car ils ont 2 côtés égaux (donc le troisième aussi).
Soit O le point d'intersection de [BL] et [DN]; le triangle BDO est isocèle, donc sa hauteur issue de O passe par le milieu de [DB] car elle est aussi médiane et médiatrice. Elle passe donc par A.
On a alors $(AO)\perp(DB)$ $(KM)//(LN)$ *et* $(KL)//(PQ)$ *et* $(KL)\perp(KP)$.
Donc KPQL est un rectangle.
Ses diagonales se coupent en leur milieu C. $AJ=\frac{1}{2}AB$ *et* $AC=\frac{1}{2}AJ$ *donc* $AC=\frac{1}{4}AB$.

Simon (déjà cité), distingue lui très clairement le " Comment ça marche ? " du " Pourquoi ça marche ? " et utilise deux triangles semblables.

Après avoir cherché un "bon petit bout de temps", je pense avoir compris pourquoi ça marchait.
En fait les triangles FDB et FGA sont deux triangles "semblables" ou "isomères" (mêmes angles, même rapport)……

Citons enfin Vincent, qui tout en reconnaissant son incapacité à convaincre un camarade de sa propre solution, réfléchit aux démarches dont *" il a entendu parler"* et devrait pouvoir convaincre ses camarades de leurs erreurs :

J'ai entendu parler d'une solution avec aucun arc de cercle tracé à l'aide de parallélogrammes mais je ne vois pas comment tracer des parallélogrammes avec une règle non graduée et sans l'aide d'un compas……
Je ne sais pas comment je pourrais expliquer ma solution et convaincre un camarade si je ne suis pas convaincu moi-même. Je suis persuadé qu'on peut trouver moins de 4 cercles.
Quant à ceux qui ont réussi à trouver c avec leur système de parallélogrammes, je leur dirai que leur solution n'est pas correcte car il faut tracer au moins un arc de cercle. Sinon, la question ne serait pas posée.

6.6. CONCLUSION

La recherche d'un minimum de tracés de cercles représente une intéressante motivation puisqu'elle permet aux élèves de se lancer des défis. Ce devoir qui peut aussi être posé au collège nous a montré la grande variété des procédures utilisées.

À partir de leur analyse, on peut clairement identifier trois déclencheurs d'économie de cercles :

- La modification de rayons de cercles,
- L'utilisation d'un symétrique,
- La découverte d'une configuration.

Les deux premiers sont accessibles dès le collège ; ils peuvent permettre de mettre en place des enchaînements entre les différentes stratégies, d'insister sur la notion de preuve et de mettre en œuvre une démonstration.

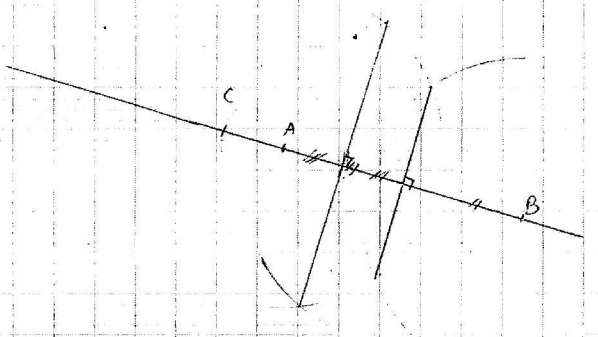
La découverte d'une configuration demande une plus grande maturité et semble encore poser des problèmes en 1ère S. Si la nécessité de la démonstration est à ce niveau bien comprise, un certain nombre d'élèves rencontre encore des obstacles pour exhiber une configuration et pour utiliser ses propriétés dans une démonstration.

La phase de compte-rendu offre en 2de ou en 1ère S la possibilité de présenter la configuration du trapèze complet. Elle permet en effet, en l'utilisant trois fois, d'effectuer un tracé en 1 cercle seulement.

6.7. La copie de Nathanaël, élève en seconde

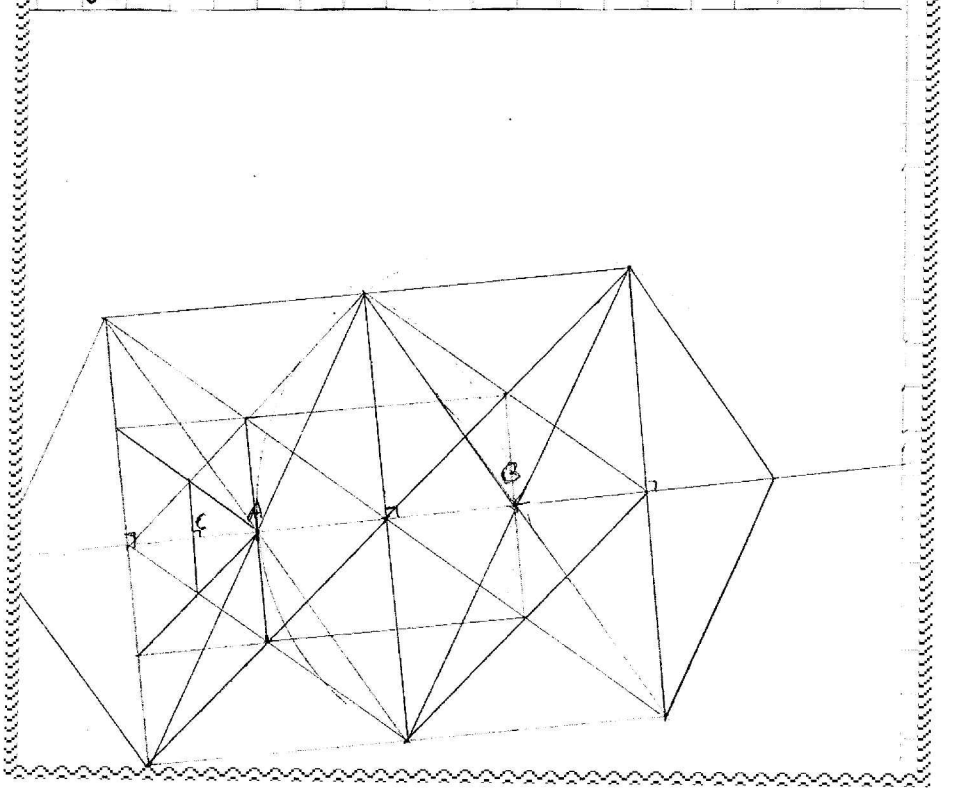
Page 1

Après lecture de l'énoncé, je construis
fait d'abord une figure : une droite avec
deux points A et B, je trace le milieu de
[AB] grace a mon compas en faisant la
médiatrice de ce segment. Je trace ensuite
le milieu d'une des moités de [AB] toujours avec
mon compas et je reporte la longueur obtenue
pour trouver C ;



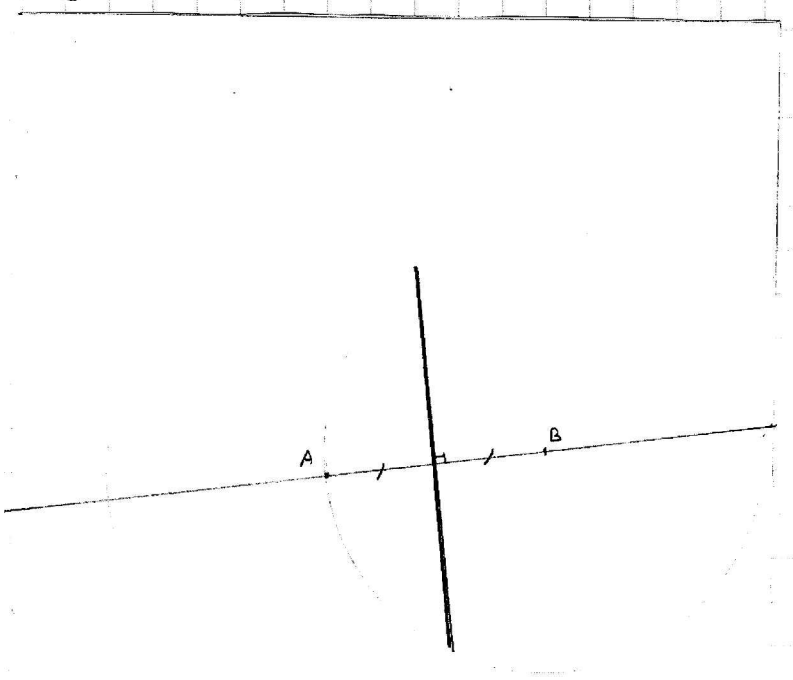
J'ai donc tracé cette figure avec J
ec de cercle mais bon il faut que je
trouve C avec la moins de cercle possible
donc il me faut faire des "economies" de

cercle. Les arcs me servent à tracer les milieux de segments, il faut donc que j'utilise un autre moyen ; il en existe un autre : les diagonales des parallélogramme se coupent en leur milieu. Il me faut donc chercher les parallélogrammes, pouvant être tracé. Sans tracer de cercle ou en traçant 1 seul, il m'a pas impossible de tracer des parallélogrammes. Mais en traçant deux arcs, j'ai réussi à trouver C ; cela donne cette figure.

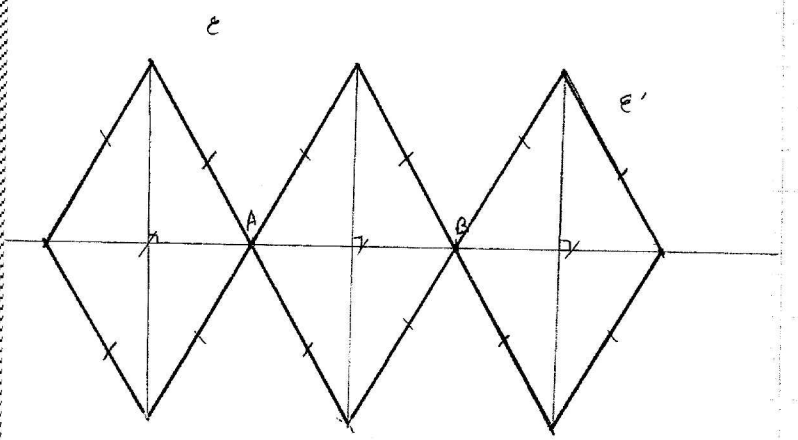


Cette figure bien telle quelle ne vaut pas grand chose, elle est anchangé et on n'y voit pas grand chose, c'est pour cela que je vais expliquer en plusieur étapes, sa construction.

1. Je trace tout d'abord, une droite, deux point AB, et le milieu du segment [AB] grace à deux cercle de diamètre AB.

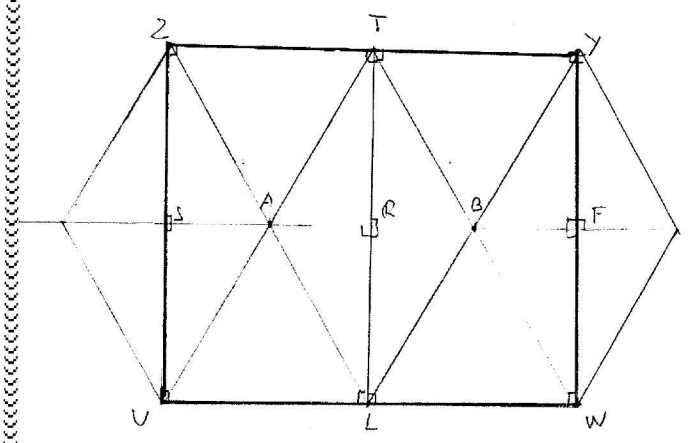


2. Maintenant je vais tracer des losanges ayant comme longueur de côté AB.



Je remarque que ces trois losanges sont semblables (4 côtés égaux et deux angles égaux) que chaque coté est égal à AB (façon des cercles E et E') et que une des diagonales est égale, elle aussi à AB.

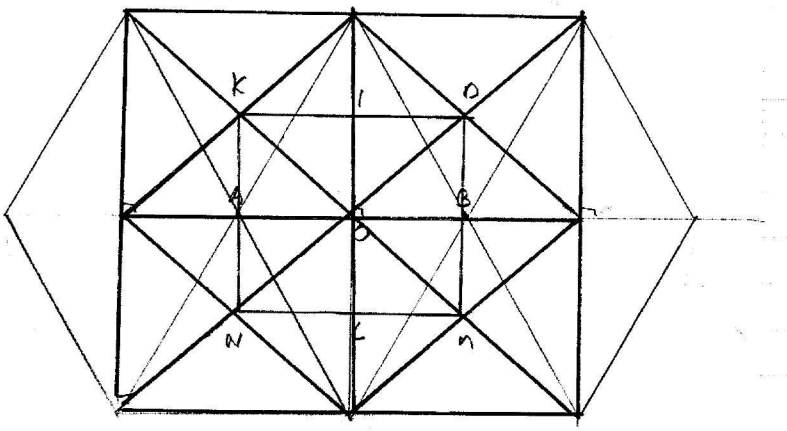
3. Maintenant je vais tracer les droites passant par les sommets des losanges et donc former un rectangle avec comme longueur



Je constate que cela forme 4 rectangles de longueur 2 fois plus petite que le grand (ZYUW) donc de longueur AB (ZTRS, TYRR, SRLU et RFWL)

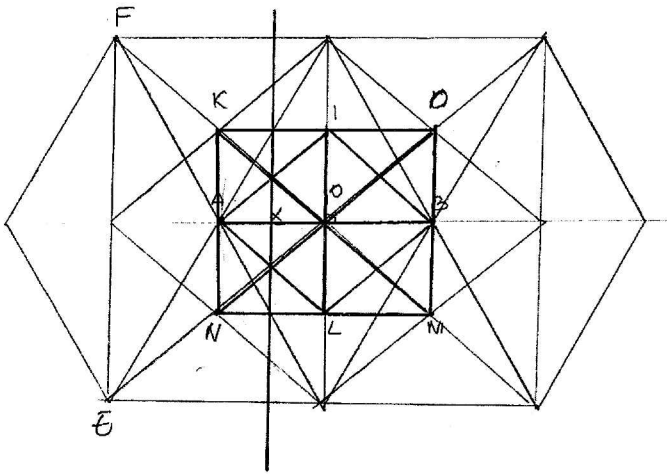
Cela commence à devenir intéressant, car maintenant je vais pouvoir tracer les diagonales de ces rectangles et les relier pour former encore un nouveau rectangle de longueur AB

9. Je trace donc les diagonales de ces quatres carrés et je relie les 4 points au centre du carré



On voit que le rectangle KDMN est de longueur AB, il est constitué de 4 autres plus petit rectangle : KIOA, OLNA, IDBO et OBLN de longueur $\frac{1}{2}$ AB donc si je trace leur diagonales je pourrais avoir $\frac{1}{4}$ AB.

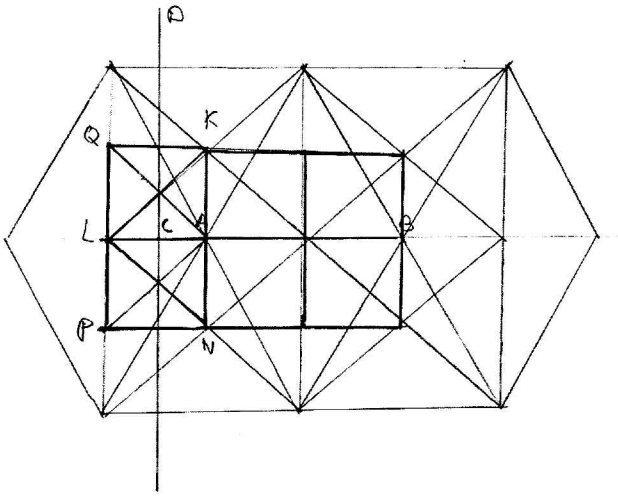
5. Je trace les diagonales de KIOA et AOLN et après je les relie les deux points où elles se coupent.



J'ai tracé les diagonales de ces rectangles (KIOA et AOCW) et je les ai reliée, la droite obtenue va donc couper [AO] en son milieu et comme $AO = \frac{1}{2} AB$ alors $AX = \frac{1}{4} AB$.

J'ai la partition $\frac{1}{4} AB$ mais elle est mal située donc il faut que je la transporte suivant les conditions de l'énoncé. Je pourrai utiliser le compas mais cela me ferait 1 cercle en plus, la solution est toute simple, si je prolonge [KO] et [WC] en direction de la droite (FE) alors j'aurais donc nouveau rectangle de longueur 1/2AB et si je trace leur diagonale et je les relies alors j'aurais la ligne x cherchée c.

Page 8



J'ai donc tracé les diagonales de QKAL et CANP, j'ai relié les 2 points où les diagonales se croisent, ce qui me fait la droite D qui partage CA en son milieu partie égale et comme CA = $\frac{1}{2}$ AB alors CA = $\frac{1}{2}$ ab. J'ai réalisé les conditions de l'énoncé avec deux cercles, j'ai bien essayé avec 1 cercle mais cela n'a rien donné de concluant.

7. POINTS SUR LES FACES D'UN CUBE

7.1. ÉNONCÉ

Vous disposez d'un cube de 10cm d'arête et vous désignez par A un de ses sommets. Dterminez tous les points du cube situs 15 cm du point A

Cet énoncé a été donné en seconde. On peut donner un problème analogue avec un questionnement plus simple en troisième, après avoir revu le théorème de Pythagore en géométrie plane. L'étude de la sphère n'est pas nécessaire.

Vous avez un cube de 10 cm d'arête, vous appelez A un sommet de ce cube, combien y a-t-il de point(s) sur les arêtes du cube, à 15 cm du sommet A ?

7.2. OBJECTIFS

L'objectif essentiel est le repérage des obstacles à l'apprentissage de la géométrie dans l'espace.

La recherche de problèmes de géométrie[21] dans l'espace place les élèves face à des difficultés différentes de celles de problèmes de géométrie plane.

En effet, en géométrie plane, la figure qui est réalisée pour résoudre le problème peut être elle-même objet d'étude. Il peut y avoir identification entre la représentation et le représenté, c'est le cas par exemple lorsque l'élève travaille sur un triangle ou sur un quadrilatère.

En géométrie dans l'espace, la démarche est très différente. Il ne peut y avoir identification qu'à la condition qu'une maquette soit réalisée ; cette méthode est rarement adoptée et l'élève se trouve donc, en général, face à la difficulté de la représentation des objets tridimensionnels par des dessins plans, puis face à l'interprétation de ces représentations pour résoudre son problème.

Au collège, comme au lycée, un état des lieux peut être nécessaire avant une séance de cours sur la géométrie dans l'espace. Comment l'élève aborde-t-il un problème de géométrie dans l'espace ? Quelles représentations utilise-t-il ? Quelles interprétations en fait-il ?

---

[21] AUDIBERT G. ; La perspective cavalière.

7.3. MÉTHODES DE RECHERCHE DES ÉLÈVES

En seconde ou en troisième, on relève des approches très semblables. Ces différentes méthodes de recherche traduisent les conceptions correctes ou erronées des élèves pour résoudre des problèmes de géométrie dans l'espace. On trouve des procédures relevant de démarches expérimentales utilisant des mesures sur maquettes ou dessins et des démarches calculatoires en appliquant fréquemment le théorème de Pythagore.

Les procédures décrites ci-dessous ont été mises en œuvre par des élèves de seconde, on trouve des procédures identiques chez les élèves de troisième, qui cherchent les points solutions sur les arêtes et non sur les faces.

Considérations sur l'énoncé.

Procédure 1. Localiser le sommet A.

L'élève s'interroge clairement sur la dépendance (ou l'indépendance) de la nature de la solution avec le choix initial du sommet A.

Procédure 2. Plein ou vide.

Au cours de sa recherche l'élève éprouve le besoin de savoir si une sphère ou un cube sont des objets pleins ou vides car il a la certitude que cela a une incidence sur la nature de la réponse.

Procédure 3. Sphère.

Après quelques essais, l'élève affirme que la solution de ce problème est donnée par la recherche de l'intersection d'une sphère et d'un cube.

Utilisations d'une maquette.

Procédure 4. Cheminement sur les arêtes

L'élève cherche des points à 15 cm de A en suivant les arêtes, il décompose 15 cm en 10 cm (une arête issue de A) plus 5 cm et il trouve donc 6 points solutions.

Procédure 5. Localisation, existence et maquette.

L'élève réalise une maquette creuse du cube en grandeur réelle ou à l'échelle, il repère un sommet A. Il place l'extrémité d'une ficelle de longueur convenable en A et déplace l'autre extrémité. Il affirme qu'il existe des points répondant à la question.

Utilisations de dessins.

Procédure 6. Patron et cercle.

L'élève dessine un patron du cube, repère un point A, trace un cercle de centre A de rayon 15 cm, ce dessin est parfois réalisé à l'échelle 0,5. Il affirme que les intersections de ce cercle avec les représentations des faces du cube sont les solutions.

Procédure 7. Perspective et cercle.
L'élève dessine le cube en perspective cavalière, repère un point A, trace un cercle de centre A de rayon 15 cm, ce dessin est parfois réalisé à l'échelle 0,5. S'il observe des intersections, il affirme que les intersections de ce cercle avec les représentations des faces du cube sont les solutions. S'il n'observe aucun point d'intersection, il affirme qu'il n'existe pas de solution.

Procédure 8. Vue et cercle.
L'élève dessine une vue du cube, c'est à dire un carré de 10 cm de côté, repère un point A, trace un cercle de centre A de rayon 15 cm. Comme ce cercle ne coupe pas le carré, il affirme qu'il n'existe pas de solution.

Procédure 9. Dessin des faces et cercle.
L'élève dessine en vraie grandeur une face contenant A et un cercle de centre A de rayon 15 cm. Il affirme qu'il ne peut y avoir aucun autre point sur les trois faces contenant A.

Utilisations de calculs.

Procédure 10. Localisation et calcul.
L'élève calcule la diagonale d'une face contenant A et affirme qu'il ne peut y avoir aucun point sur les trois faces contenant A.

Procédure 11. Localisation, existence et calcul.
L'élève calcule la diagonale d'une face contenant A puis la diagonale du cube, il constate que 15 est compris entre ces deux longueurs. Il affirme qu'il existe des points répondant à la question sur les trois faces ne contenant pas A.

Procédure 12. Localisation, essais et existence.
L'élève calcule la diagonale d'une face contenant A. Il calcule ensuite à l'aide du théorème de Pythagore la distance de A à quelques points sur des arêtes des faces ne contenant pas A. Il choisit le milieu d'une de ces arêtes, constate qu'il convient et affirme qu'il existe des points répondant à la question sur les trois faces ne contenant pas le point A.

Procédure 13. Localisation et balayage.
L'élève dessine plusieurs plans contenant une arête passant par A. Dans chacun d'eux à l'aide d'un calcul ou d'un dessin il détermine un ou plusieurs points répondant à la question. Il propose une solution obtenue point par point sans se prononcer sur sa forme.

Procédure 14. Localisation sur une face et arc de cercle.
L'élève réalise un triangle rectangle dont un côté est une arête passant par A. À l'aide du théorème de Pythagore il recherche tous les points à 15 cm de A situés sur la face perpendiculaire à cette arête. Il constate qu'ils déterminent un arc de cercle.

Procédures 15. Calculs de volumes.
Lorsque le cours sur la sphère a été fait, l'élève calcule le volume du cube et de la sphère et les compare.

7.4. QUELQUES ÉLÉMENTS D'ANALYSE

Utilisation de la maquette.

A travers les écrits des élèves, on voit que l'utilisation d'une maquette (procédure 4) n'est pas satisfaisante pour tous.

Pour certains c'est du bricolage, ce ne sont pas de vraies mathématiques et il ne s'agit que d'une première approche expérimentale. C'est le cas de Marie 3ième :

Je trouve grâce à une ficelle des résultats approximatifs qui ne me permettent pas une réponse scientifique

Pour d'autres élèves, en général des élèves en difficulté, c'est la seule solution qu'ils proposent et bien que la démarche et les solutions soient correctes, ils ne sont pas satisfaits de leurs propositions.

Michel, élève en 3ième, arrive en classe avec un cube en carton dont il a évidé les faces, une ficelle est tendue à l'intérieur, sur sa copie il écrit :

C'était difficile, j'ai essayé mais je n'arrive pas à faire autre chose mais j'ai un peu trouvé

Démarche expérimentale en géométrie dans l'espace et profils d'élèves.

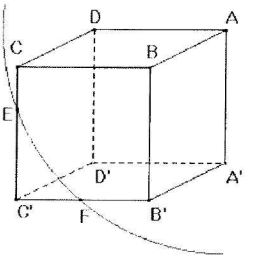
Exceptés les élèves qui ne proposent que la procédure maquette, tous les élèves ont une première approche du problème en réalisant une représentation plane du cube (procédure 5, 6, 7, 8). Ils adoptent souvent une méthode expérimentale identique à celle de la géométrie plane (tracés, mesures sur le dessin), mais à la suite de ces essais, l'utilisation et l'interprétation de leurs résultats traduisent des profils d'élèves très différents quant à leur perception d'un problème de géométrie dans l'espace.

Nous relevons deux types d'élèves : les uns restent dans un problème de géométrie plane, les autres ont une bonne image mentale de l'objet en trois dimensions en replaçant le problème dans l'espace.

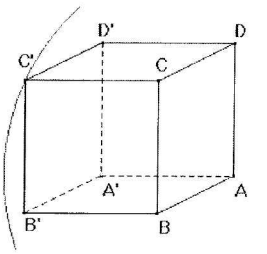
- ***Élèves qui restent en géométrie plane.***

Caroline enchaîne les procédures 6 et 1. Elle connaît la représentation en perspective cavalière d'un cube qu'elle utilise comme figure plane. Elle transforme donc ce problème de géométrie dans l'espace, en un problème de géométrie plane. Les solutions dépendent du centre du cercle tracé, aucun retour à l'objet cube n'est envisagé.

Dans cette figure il n'y a que deux points à 15 cm du point A. On les nomme E et F



Dans cette figure un seul point à 15 cm du point A. C'est le point passe C'.

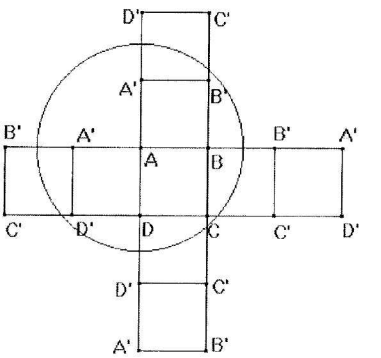


Avec d'autres figures, si je change le sommet A je trouve d'autres solutions.

Certains élèves élaborent une discussion autour des différentes représentations en perspective cavalière du cube suivant l'angle des fuyantes ou le coefficient de réduction.

Cette approche expérimentale est également mise en œuvre par des élèves sur le dessin du patron du cube en enchaînant les procédures 5 et 1. C'est le cas de Guy, 3ième qui réalise un développement du cube et raisonne sur celui-ci.

Il suffit de tracer une sphère de 15 cm de rayon.



Mais une sphère est trop compliquée à réaliser.
Je vais mettre le cube à plat

Pour ce type d'élèves un travail de remédiation est nécessaire pour pouvoir envisager un apprentissage efficace en géométrie dans l'espace. Des activités reposant sur l'interaction entre représentations et maquettes leur permettront de se

constituer progressivement des représentations mentales indispensables à tout raisonnement dans un problème de géométrie dans l'espace [22].

- ***Élèves qui replacent le problème dans l'espace.***

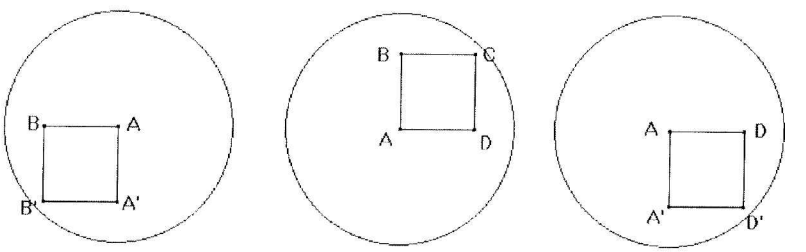
Après une démarche expérimentale sur des dessins et un regard critique sur leurs résultats, un retour à la situation spatiale du problème les amènent à s'engager dans des procédures calculatoires 10, 11, 14. Ces élèves expliquent leurs changements de stratégies.

Alexandre a réalisé un dessin semblable à celui de Guy, il ajoute :

Cette figure n'apporte rien vu que c'est un volume que l'on cherche et non une surface plane
Vu que ce patron est un cube, ce cercle est une boule de 15 cm de rayon.

Après avoir observé la position de C' sur son dessin, Clément, élève en 3ième, réalise que son approche plane est insuffisante :

Je dessine les trois faces où est représenté le point A



Vue de droite *Vue de dessus* *Vue de face*

Je remarque à l'œil nu qu'il n'y a aucun point sur le cube qui soit à 15 cm de A
Mais parfois il y a des trompe l'œil!!!!
STOP
Je m'arrete là me rendant compte de ma bêtise car en fait le point C' est bien plus écarté de A que de D, C ou B.
Mais pour qu'il y ait des points à 15 cm de A sur le cube il faut que AC' soit supérieur à 15 cm.

[22] On peut consulter à ce sujet : Enseigner la géométrie dans l'espace F. BONAFÉ et M. SAUTER ; ou encore : Voir et raisonner : à la conquête de l'espace au collège par l'IREM de Strasbourg

La copie d'Adélaïde présentée ci-après dans son intégralité est caractéristique de cette démarche.

7. 5. Conclusion

Les élèves qui arrivent à résoudre ce problème ont une bonne image mentale du cube en dimension 3, ils savent extraire des sous-figures planes pertinentes, ici des triangles rectangles, à partir de la représentation en perspective cavalière.

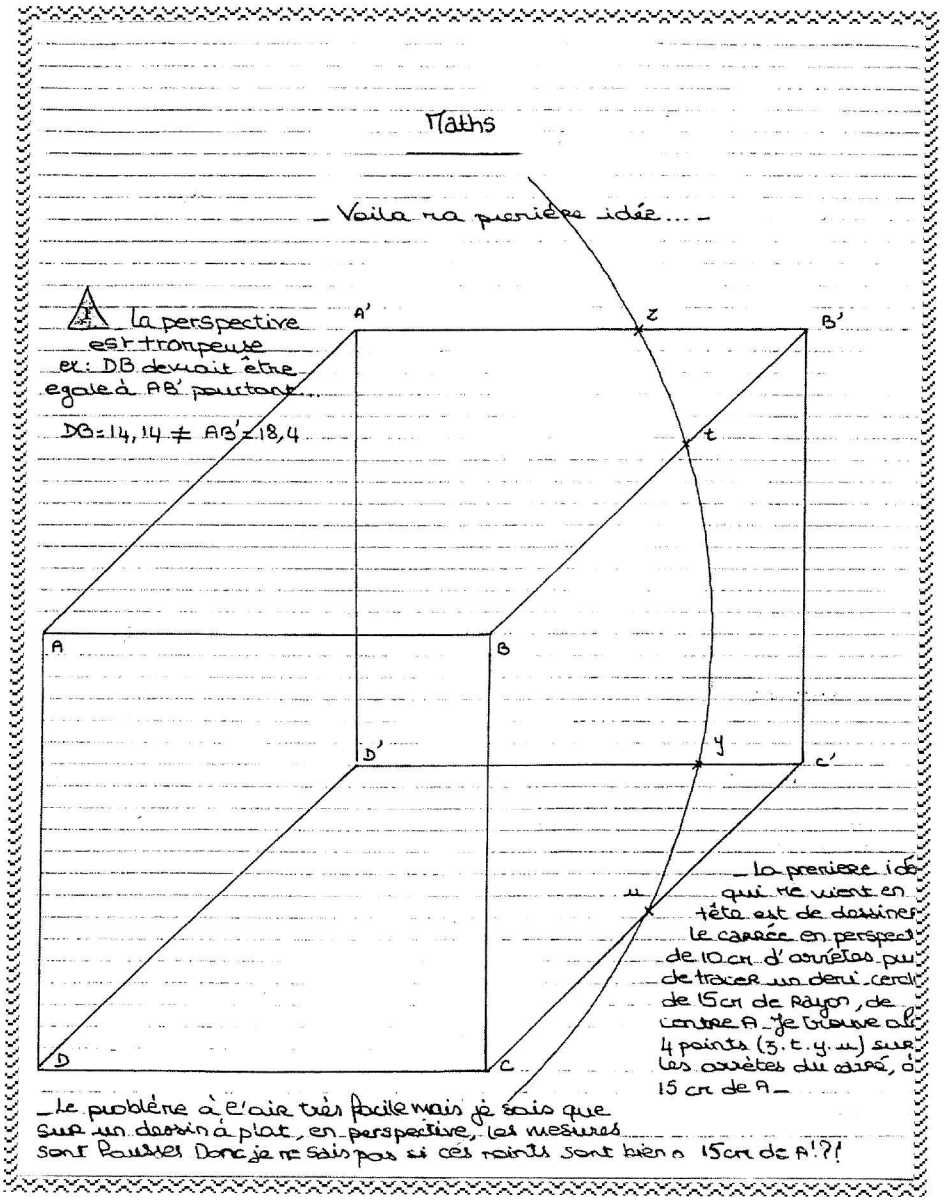
Un travail de remédiation pour les élèves en difficulté serait de construire des maquettes en papier, en carton, puis de dessiner et étudier les différentes représentations de ces maquettes.

Il faudrait également faire la démarche inverse, c'est à dire construire l'objet à partir de la représentation.

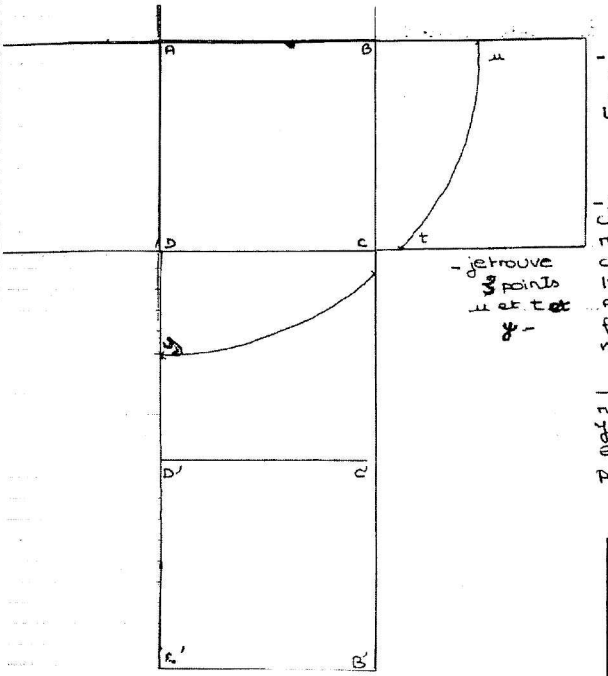
Enfin, un travail plus approfondi sur les représentations, consisterait à dessiner en vraie grandeur différentes sections du cube , la maquette pouvant être un objet de contrôle ou une étape intermédiaire.

7. 6. LA COPIE D'ADÉLAÏDE ÉLÈVE EN TROISIÈME

Page 1



Page 2

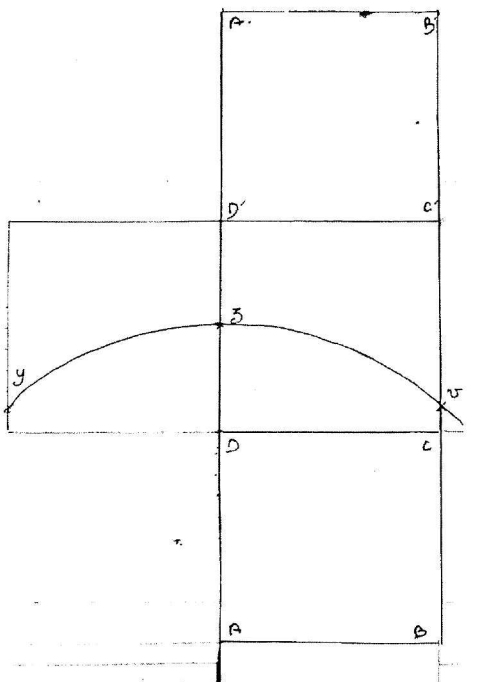


- ma dernière idée est de faire le patron, pour être sûr d'avoir les bonnes dimensions.

- j'ai un petit problème car un fois le carré monté je n'arrive pas a tracer un cercle de 15 cm de rayon et de cent A. Donc je le fais une fois le patron de faits mais.....

- je trouve 3 points u et t et y -

- il faut dire que j'ai mal place mon point. Je vais refaire un patron en changeant de place les points.



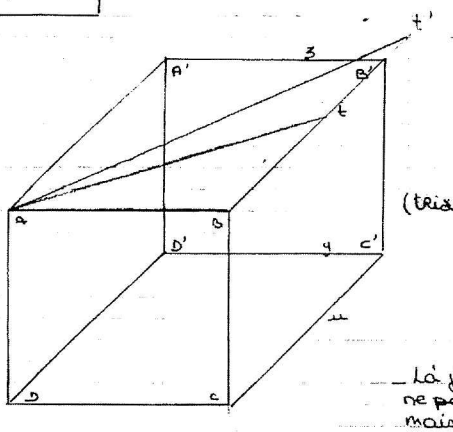
- Voilà mon dernière patron mais toujours je trouve 3 point (y.3.v) à 15 cm de A!

- Je pense qu'il ne faut pas tracer le cercle lorsque le patron est à plat mais lorsqu'il est monté malheureusement ça m'est impossible, je n'y arrive pas!?!

- J'abandonne l'idée des patron!

– Ma 3ème idée c'est utiliser pytagore –

H = 1cm



– je refais le carré en perspective que j'ai fais en premier, où j'ai trouvé 4 point à 15 cm de A –

– je vais verifier avec pytagore –

– je sais que AB = 10
AT = 15
(triangle rectangle) donc :

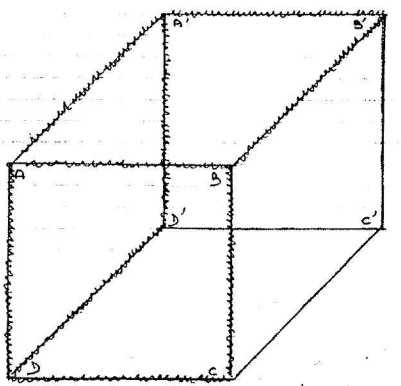
$$\begin{cases} AB^2 + BT^2 = AT^2 \\ 10^2 + BT^2 = 15^2 \\ 100 + BT^2 = 225 \\ 225 - 100 = BT^2 \\ 125 = BT^2 \\ BT = \sqrt{125} = 5\sqrt{5} \end{cases}$$

– Là je suis un peu coincé car je ne peut pas tracer $5\sqrt{5}$ à la règle mais comme je sais que :
$\sqrt{125} = 5\sqrt{5} \simeq 11,2$
je peut verifier –

– BT = 6,2 donc cela montre bien que la perspective est vraiment trompeuse !! Maintenant que sais que le point t est à 11,2 cm de B je peut le trouver –

– Bien sûr, je n'ai pas réfléchi, il sort du carré de 10 cm d'arrêtes !

– J'arrête avec pytagore, il ne vient une autre idée.....



– je vais "annuler" les arrêtes où il est impossible d'avoir un point de 15 cm de A –

– AA', AB ; AD car ce sont des droites issue de A qui font 10 cm –

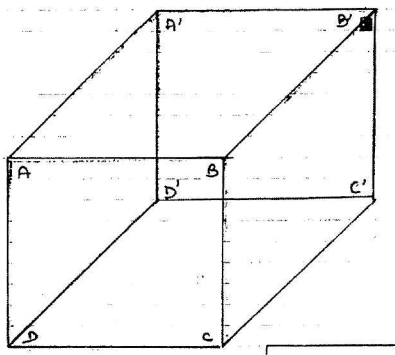
– je calcule les diagonales avec le théorème de pythagore :
$100 + 100 = \text{diagonal}^2$
$200 = \text{diagonal}^2$
$14,14 = \text{diagonal} < 15$

– Donc je peut "annuler" A'B' ; DC ; DD' ; D'A' ; BD' ; CB sans crainte –

– Il ne reste 3 droites où il peut y avoir un point à 15 cm de A –

→ enfin, je vais verifier

– Je vais calculer AC' dans le triangle AB'C', rectangle :
$AB'^2 = AC^2 + B'C'$
... euh, il n'est pas rectangle !



– Je ne sais pas comment je peux le calculer, il n'y a aucun triangle rectangle avec AC' comme côté, comment je vais faire ?!? –

– Mais... je me rend compte que l'angle AB'C' est un angle droit. Donc ! Je peux utiliser pythagore.

$AC'^2 = AB'^2 + BC'^2$
$AC'^2 = 14,14^2 + 10^2$
$AC'^2 = 200 + 100$
$AC'^2 = 300$
$AC' = \sqrt{300} \simeq 17,3 > 15$

DONC IL Y AURA 3 points a 15 cm de A
– 1 SUR C'D
– 1 SUR C'B'
– 1 SUR CC'

8. ÉNONCÉS DIVERS

Les énoncés de narration de recherche de cette liste ont été proposés dans des classes de collège ou de lycée.

Le niveau de la classe n'est pas précisé car, comme nous l'avons vu précédemment, un même énoncé peut être proposé à divers stades de la scolarité et l'enseignant saura adapter ses exigences de recherche aux connaissances disponibles chez ses élèves.

Cette liste est loin d'être exhaustive et le lecteur trouvera de nombreux énoncés pour les narrations de recherche dans les rallyes de mathématiques, les énigmes proposées dans certains manuels ainsi que dans la brochure de l'IREM de Lyon "Problème ouvert et situation-problème" déjà citée.

ÉNONCÉ 1.

À la boulangerie, Fred paie 2,40 € lorsqu'il achète deux pains et une baguette.
Il paie 0,30 € de moins lorsqu'il achète deux baguettes et un pain.
Quel est le prix d'une baguette ?
Quel est le prix d'un pain ?

ÉNONCÉ 2.

Paul possède une certaine somme d'argent lorsqu'il part faire ses achats.
Dans le premier magasin, il dépense la moitié de ce qu'il possède, plus 1 €.
Dans le deuxième magasin, il dépense la moitié de ce qu'il lui reste, plus 1 €.
Paul entre dans un troisième magasin, et là, il dépense la moitié de l'argent qui lui reste, plus 1 €.
Enfin il fait son dernier achat dans un quatrième magasin où il dépense la moitié de ce qu'il lui reste, plus 1 €, et il s'aperçoit alors qu'il a dépensé toutes ses économies.
Combien d'argent Paul possédait-il au départ ?

ÉNONCÉ 3.

Marie dispose de 18 billets ; les uns de 5 €, les autres de 10 €. L'ensemble de ces billets représente une valeur de 125 €.

Quel est le nombre de billets de 5 € que possède Marie?
Quel est le nombre de billets de 10 € que possède Marie?

ÉNONCÉ 4.

Il s'agit de remplir chaque case du tableau ci-dessous, avec des nombres entiers allant de 1 à 9, chacun étant utilisé une seule fois. A l'extérieur du tableau sont indiqués les produits des nombres de chaque ligne et de chaque colonne.

A	B	C	270
D	E	F	16
G	H	I	84
336	27	40	

ÉNONCÉ 5.

Trouve pour chacune des fractions 3/5 ; 4/7 ; 6/11 une écriture équivalente sous forme de fraction telle que :

le dénominateur de la première soit égal au numérateur de la deuxième et, le dénominateur de la deuxième égal au numérateur de la troisième.

ÉNONCÉ 6.

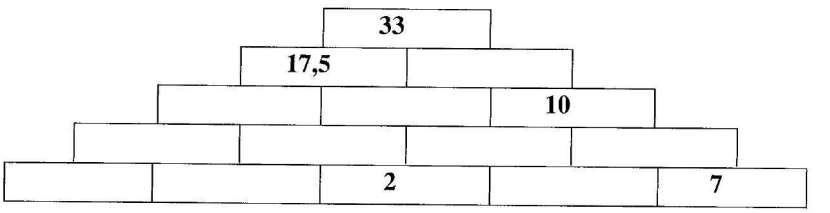
Un petit garçon raconte ses vacances.

"Il y a eu 11 jours de pluie ; pendant ces 11 jours, quand il pleuvait le matin, il faisait beau l'après-midi, et s'il pleuvait l'après-midi, il avait fait beau le matin".

Au total ce petit garçon a eu 9 matinées et 12 après midi sans pluie.
Peux-tu trouver combien de jours de vacances a eu ce petit garçon ?

ÉNONCÉ 7.

Complète cette pyramide :
Le nombre inscrit dans chaque case s'obtient en additionnant les deux nombres placs dans les cases situes au-dessous.



ÉNONCÉ 8.

Les trois fils de M. et Mme Dupont, Jean, Jacques, et Julien, essaient de battre un record. Il s'agit de décomposer un nombre, 14, en une somme de nombres entiers et d'en obtenir le plus grand produit possible.
Jean propose : $14 = 10 + 4$ et $10 \times 4 = 40$!
Mais Jacques lui dit : $14 = 7 + 7$ et $7 \times 7 = 49$!!
Alors Julien s'écrie : $14 = 6 + 5 + 3$ et $6 \times 5 \times 3 = 90$!!!

Il y a donc un record battre ..... Peux-tu relever ce dfi ?

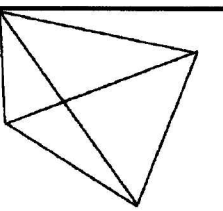
ÉNONCÉ 9.

Les progrès de la génétique sont merveilleux : dès aujourd'hui une poule sur deux a des plumes bleues, deux poules sur cinq ont des dents et il y a autant de poules avec dents et sans plumes bleues, que de poules sans dents ni plumes bleues.

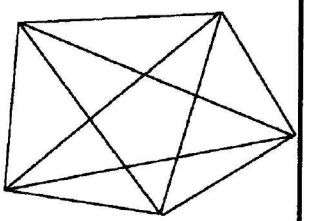
Quel est donc le pourcentage de poules ayant des dents parmi celles qui ont des plumes bleues ?

ÉNONCÉ 10.

Nous savons qu'un polygone à quatre côtés possède deux diagonales.



Un polygone à cinq côtés possède cinq diagonales.



Dessine un polygone à six côtés. Combien possède-t-il de diagonales ?
Dessine un polygone à sept côtés. Combien possède-t-il de diagonales ?
Dessine un polygone à huit côtés. Combien possède-t-il de diagonales ?
Combien de diagonales possède un polygone à neuf côtés ? à dix côtés ?
Peux-tu déterminer le nombre de diagonales que possède un polygone à cent côtés ?

ÉNONCÉ 11.

Un triangle ABC a pour mesure de longueur de ses côtés :
AB = 5 cm ; BC = 7,5 cm ; AC = 9,5 cm

Où faut-il placer le point M sur le côté [AC] pour que les deux triangles ABM et BMC aient le même périmètre ?

Où faut-il placer le point M sur le côté [AC] pour que les deux triangles ABM et BMC aient la même aire ?

Pourrait-on trouver la mme solution pour les deux questions ?

ÉNONCÉ 12.

On dispose de deux cercles et d'un rectangle, tous de dimensions quelconques.

Comment pourrais-tu les placer les uns par rapport aux autres, pour obtenir le maximum de points d'intersection entre eux ?

ÉNONCÉ 13.

D'après Fibonnaci ...

Deux tours, hautes de 30 m et de 40 m, sont distantes l'une de l'autre de 50 m. Un puits est situé entre les deux tours. Deux oiseaux, volant à la même vitesse, s'envolent en même temps, chacun du sommet de chaque tour, pour se poser au même moment sur le puits.
Comment pourrais-tu dterminer la position de ce puits entre les deux tours ?

ÉNONCÉ 14.

Dans un triangle quelconque ABC, M est le milieu de [AB],
N est le milieu de [MC],
P est le milieu de [AN].
La droite (BP) coupe [AC] en I, et la droite (BN) coupe [AC] en J.
Les segments [AI] et [IJ] peuvent-ils avoir la mme longueur ?

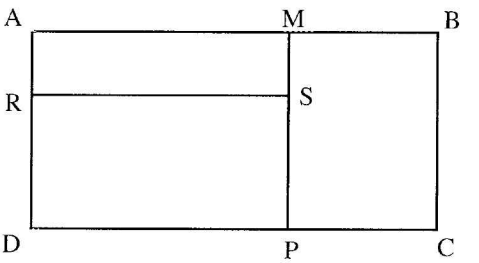
ÉNONCÉ 15.

Dans un triangle BAC rectangle en A, on place un point P, au hasard, sur l'hypoténuse de ce triangle.
La perpendiculaire à la droite (AB) passant par P, coupe cette droite (AB) en un point I.
La perpendiculaire à la droite (AC) passant par P, coupe cette droite (AC) en un point J.
Lorsqu'on déplace le point P sur l'hypoténuse, on peut remarquer que la mesure de longueur du segment [IJ] varie.
O faudrait-il placer le point P sur l'hypotnuse du triangle BAC pour que le segment [IJ] ait la plus petite longueur possible ?

ÉNONCÉ 16.

Dans ce dessin, le rectangle ABCD a pour dimensions : AB = 17cm et BC = 12cm.
Dans le rectangle ABCD, les points M, R, S et P déterminent trois rectangles, disposés comme sur le dessin.

Où peut-on placer les points M, R, S, et P pour que les trois rectangles AMSR , RSPD et MBCP aient le même périmètre ?



ÉNONCÉ 17.

ABC est un triangle équilatéral et P un point quelconque du segment [AB]. On pourra prendre AB = 10cm.
Soit M un point quelconque du segment [AC] et N le point du segment [BC] tel que les droites (MN) et (AB) soient parallèles.

Où faut-il placer M pour que l'aire du triangle MNP soit la plus grande possible ?

ÉNONCÉ 18.

Le rectangle d'Euclide
Trace un rectangle ABCD tel que AB = 8 cm et BC = 5 cm.
Place un point E sur [AC] tel que AE = 3 cm.
Trace la parallèle à (AD) qui passe par E ; elle coupe (AB) en N et (DC) en L.
Trace la parallèle à (AB) qui passe par E ; elle coupe (AD) en M et (BC) en K.
Parmi les deux rectangles EMDL et ENBK quel est celui qui a la plus grande aire ?

Remarque. La recherche est très différente si les dimensions ne sont pas fixées

ÉNONCÉ 19.

Paul a construit un triangle isocèle ABC de sommet principal A et dont l'angle en B mesure 61°. Il a placé un point D sur la demi droite [AC), extérieur à [AC], tel que

CD = BC. Il a joint B à D. Il dit que le triangle ABD est rectangle. Es tu d'accord avec lui ? Pourquoi ?

ÉNONCÉ 20.

Paul et Marie ne sont pas d'accord.
Paul dit : "Dans l'expression : $n^2 - 14n + 49$, si l'on remplace n par n'importe quel nombre entier naturel, on obtient toujours un nombre différent de zéro".
Marie affirme le contraire.
Qui a raison ?

A nouveau Paul et Marie ne sont pas d'accord.
Paul dit : "La somme de trois nombres entiers consécutifs est toujours un multiple de trois".
Marie affirme le contraire.
Qui a raison ?

ÉNONCÉ 21.

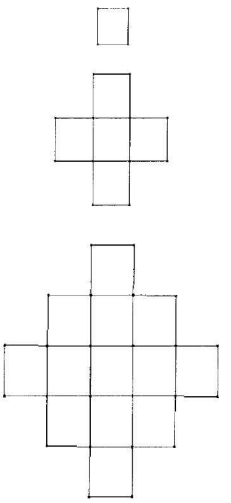
Deux nombres ont pour somme 300, de combien augmente leur produit si j'augmente chacun d'eux de 7 ?

ÉNONCÉ 22.

Combien peut-on écrire de nombres de 9 chiffres avec les chiffres 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 si on peut répéter des chiffres (par exemple 112268339) ?
Et si les répétitions sont interdites, combien de nombres de 9 chiffres si on ne peut pas répéter des chiffres ?

ÉNONCÉ 23.

On construit des figures avec des carrés, on associe à chaque figure le nombre de carrés qui la constituent



$a_1 = 1$ carr

$a_2 = 5$ carrs : on ajoute des carrs autour de la figure prcdente

$a_3 = 13$: on ajoute des carrs autour de la figure prcdente

On continue ainsi ces constructions. Dterminer a_4, a_5 ,....., a_{10}, ...

Donner la formule gnrale pour a_n

ÉNONCÉ 24.

Démasquer le coupable.

On sait que c'est un multiple de 9, c'est aussi un multiple de 5. Ce n'est pas un multiple de 2 et il est inférieur à 10 000.

Quel est ce nombre mystérieux dans cette liste :

9 995 ; 3 779 ; 9 270 ; 559 ; 63 728 ; 10 005 ; 8 928 ; 10 665 ; 7 245 ; 975 ;

555 555 555 ; 95.

ÉNONCÉ 25.

Les chteaux de cartes.

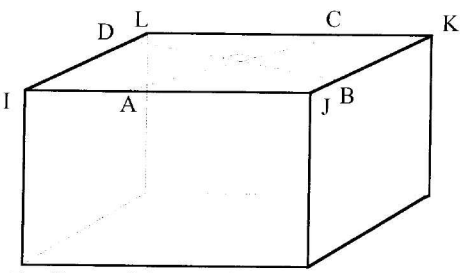
Un chteau de cartes est un empilage organis de la faon qui suit.

Chteau 1 tage Chteau 2 tages Chteau 3 tages etc...

Compléter le tableau suivant.

Pour construire	Il me faut
1 étage	2 cartes
2 étages	7 cartes
3 étages	15 cartes
4 étages	
5 étages	
12 étages	
20 étages	
108 étages	
n étages (n est un entier strictement positif)	

ÉNONCÉ 26.



La figure ci-contre représente en perspective cavalière un pavé (parallélépipède rectangle).
Les segments [AB] et [CD] sont sur la face IJKL de dessus et sont perpendiculaires.
On connaît les longueurs suivantes :
IA = 8 ; JB = 7 ; KC = 6 ; LD = 5

Est-il possible que la face IJKL soit un carré ?

ÉNONCÉ 27.

Une salle de classe a pour dimensions 7m de long, 5m de large et 3m de haut. Un fil est tendu verticalement du sol au plafond.

Une balle de revolver traverse la salle (protégez-vous !!!!..). Elle part d'un coin du plafond et aboutit à la base d'un mur, en son milieu. Cette balle se déplace en ligne droite et coupe le fil à un mètre du sol.

À quelle distance de chaque mur le fil était-il placé?

Chapitre 4

INCIDENCES SUR LES PRATIQUES, RÉINVESTISSEMENTS, PROLONGEMENTS

En voulant trouver une façon simple d'expliquer ce raisonnement à une camarade que je devais convaincre, il m'est apparu une "loi" s'appliquant à tous les cubes pour déterminer tous les points d'un cube (en le supposant vide) qui se situeraient à 3/2 de la longueur de ses arêtes...

Carole 2nde

Depuis leur mise en place, les narrations de recherche tracent de nouvelles pistes pédagogiques ; elles ont des incidences importantes sur les pratiques, quel que soit le niveau scolaire où elles sont utilisées.

Dès l'école primaire (paragraphe 1), de véritables problèmes de recherche peuvent être proposés aux élèves afin qu'ils comprennent ce qu'est une activité mathématique au-delà des formes stéréotypées. Le travail est à ce niveau plus proche de celui vécu lors des situations - problèmes : différentes phases de recherche, personnelle ou en groupe, sont ainsi mises en place pour solliciter continûment l'activité des enfants. Ces séances contribuent à valoriser la production par les élèves d'écrits personnels ou collectifs.

Au cycle central du collège, les narrations de recherche peuvent être intégrées dans les progressions des classes selon différents objectifs. Au cours de l'apprentissage d'une notion, elles ont pour but de travailler le passage progressif de la preuve pragmatique à la démonstration ou du calcul numérique au calcul littéral. Elles permettent également de réaliser, avant l'étude d'une notion, un bilan des connaissances des élèves, et de détecter ainsi les éventuels obstacles à son apprentissage. Les problèmes posés stimulent la curiosité des élèves, et leur demandent un positionnement argumenté, ce qui permet ensuite un débat en classe (paragraphe 2).

Au cycle central du collège toujours, les narrations de recherche peuvent être des écrits intermédiaires préalables à ceux plus formels attendus lors de la rédaction d'une démonstration dans les problèmes classiques de géométrie.

Pour atténuer l'obstacle de l'écriture directe de la phase formalisée de la démonstration, elles donnent la possibilité aux élèves qui le souhaitent, de décrire la phase heuristique du problème. Ainsi, aidé par l'enseignant, l'élève évolue du langage naturel des premières recherches, vers une mise en forme plus symbolique, ce qui contribue à lui faire mieux comprendre le statut de la démonstration (paragraphe 3).

Depuis quelques années, grâce au travail mené avec Dominique Bucheton au sein du Groupe d'Études et de Recherche "Maîtrise des langages mathématiques"[23], les narrations de recherche ont trouvé des prolongements dans l'observation de l'influence de la socialisation sur la reformulation d'un écrit d'élève.

Il s'agit de s'intéresser à l'évolution de l'écrit d'un élève, après un travail de groupe sur sa production, suivi d'une réécriture personnelle. On étudie plus spécialement les déplacements dans les modes d'argumentation, l'attitude par rapport à l'apprentissage ainsi que le développement des compétences linguistiques. Deux situations sont présentées (paragraphes 4 et 5) à la suite d'expérimentations au collège et au lycée ; les dispositifs pédagogiques diffèrent légèrement pour tenir compte de l'âge des élèves et de leur faculté à accepter le regard de l'autre sur leur

---

[23] G.E.R. 99 JCA 147 D ; Matrise des langages en mathmatiques. Rapport de recherche 98/2000.

propre écrit. En outre, l'expérimentation menée au collège permet d'étudier l'évolution d'un élève au cours d'une année scolaire.

Sans toutefois les détailler, nous pouvons faire état également de deux autres prolongements.

- Le premier en zone d'éducation prioritaire par l'équipe ZEP de Paris VII[24] est centré sur le travail de groupe, chaque élève devant réaliser cependant une narration individuelle.
- Le second en classe de terminale scientifique au lycée par L. Trouche[25] repose sur un travail en binôme lors de T.P.. Il s'agit d'aborder un problème et de réaliser un rapport de recherche. Le mode d'emploi, donné ci-dessous, s'apparente fortement aux consignes déjà décrites pour les narrations de recherche.

L'essentiel est donc ici la réalisation d'un rapport de recherche, dans lequel on notera avec soin les pistes empruntées (même celles qui s'avèrent être des impasses), les méthodes envisagées, les outils choisis (si la calculatrice est mise à contribution, on décrira les manœuvres exécutées). Si on trouve la réponse, tant mieux. Sinon, la recherche n'aura pas été pour autant inutile ! On apprend autant de ses succès que de ses échecs. Ce qui sera évalué, c'est donc plus la pertinence des méthodes mises en œuvre que le résultat final. La rédaction du rapport de recherche doit porter la trace des recherches. Il ne doit pas être conçu comme un devoir d'examen, parfaitement lisse. Cependant, ce rapport écrit doit rester lisible ! Le travail dans le binôme nécessite une collaboration, une mise en commun des idées, un partage éventuel des tâches. Bref, une entreprise d'équipe. Évitez la spécialisation à outrance (du genre : l'un bricole la calculatrice, l'autre écrit dans le cahier). Envisagez une rotation des tâches !

---

[24] Équipe ZEP de l'IREM de Paris 7 ; Expériences de narration de recherche en mathématiques. Brochure n°659 en vente à l'APMEP : 9,50 euros.

[25] TROUCHE L. & al ; Expérimenter et prouver, faire des mathématiques avec des calculatrices symboliques, 38 variations sur un thème imposé.

1. LES NARRATIONS DE RECHERCHE À L'ÉCOLE PRIMAIRE

De nombreuses narrations de recherche ont été proposées à l'école primaire, à des élèves du cycle III : classes de CE2, CM1et CM2.

L'observation de ces séances de travail nous amène à penser, que ces élèves de primaire, qui entrent avec beaucoup d'enthousiasme dans cette pratique pédagogique, le font de façon plus spontanée que ceux de collège ou de lycée. Le changement de contrat ne les dérange pas ; ils ne disposent pas encore vraiment d'image préétablie de ce que doit être une séance de mathématiques et sont très actifs pendant les séances de narration de recherche.

Alors que certains élèves du collège se sentent plus à l'aise avec des questions plus cadrées qu'ils cherchent à résoudre en suivant des cheminements standards, les élèves de l'école primaire cherchent volontiers à partir de consignes relativement ouvertes. C'est justement ce que proposent les narrations de recherche qui laissent plus de liberté aux élèves et leur permettent de suivre des pistes variées.

Si les élèves du primaire entrent très rapidement dans cette pratique pédagogique, ils s'essoufflent aussi assez vite, et un temps de relance collective s'avère parfois nécessaire, pour redynamiser la recherche, en mutualisant les idées.

Toutefois, les narrations de recherche faites en classe sont majoritairement plus riches que les écrits élaborés à la maison. On peut penser que cela provient d'un encadrement familial plus important ici qu'en collège ou en lycée et que les parents, souvent impliqués dans la réalisation des devoirs demandés par le maître, attachent plus d'importance à la solution qu'à la description de la recherche.

En primaire, les différentes disciplines sont enseignées par une même personne. Les matières sont moins cloisonnées, les compétences transversales d'écriture se développent plus facilement dans l'interdisciplinarité, et cela permet à l'élève d'employer sans difficulté la forme du récit pour décrire dans un langage naturel, les différentes étapes de la recherche d'un problème.

Un enseignant du primaire peut prendre quelques libertés avec la gestion de son programme. Il peut utiliser son temps, pendant ses heures de cours, de façon moins stricte qu'un professeur de collège ou de lycée, et cela facilite la pratique de la narration de recherche.

Les objectifs des nouveaux programmes de l'école primaire, applicables à la rentrée 2002, vont dans le sens des finalités des narrations de recherche :

Dès l'école élémentaire, les élèves peuvent être confrontés à de véritables problèmes de recherche, pour lesquels ils ne disposent pas de solution déjà éprouvée et pour lesquels plusieurs démarches de résolution sont possibles.
Ces problèmes, selon le moment où ils sont proposés, selon les connaissances disponibles chez les élèves, seront résolus par des "solutions personnelles" ou

par une "solution experte". La possibilité offerte aux élèves d'élaborer de telles "solutions personnelles" originales constitue à la fois une avancée dans le développement de l'autonomie de l'élève et un moyen de différenciation pour l'enseignant.

Les élèves sont fréquemment placés en situation de production d'écrits dont les fonctions sont différentes :

- *les écrits de type "recherche" qui correspondent au travail "privé" de l'élève ne sont pas destinés à être communiqués, ils peuvent comporter des dessins, des schémas, des figures, des calculs. Ils sont un support pour essayer, se rendre compte d'une erreur, reprendre, rectifier, pour organiser sa recherche. Si l'enseignant est amené à les consulter pour étudier le cheminement de l'élève, il ne doit ni les critiquer, ni les corriger.*
- *les écrits destinés à être communiqués et discutés doivent faire l'objet d'un souci de présentation, de lisibilité, d'explicitation.*
- *les écrits de référence, élaborés en vue de constituer une mémoire du travail de l'élève [...]*

Les exigences varient selon la finalité de la trace écrite. On sera attentif à ne pas se limiter à des formes stéréotypées, sécurisantes, mais pour lesquelles l'exigence formelle prime trop souvent sur le contenu de l'explication.

Ces types d'écrits se retrouvent à des étapes différentes, dans les narrations de recherche.

Déroulement d'une séquence de Narration de Recherche à l'école primaire.

Séance 1.

- Le contrat narration est rappelé ; les élèves s'approprient la méthode. Lecture silencieuse de l'énoncé, puis à haute voix par un élève. Interrogation sur les mots de l'énoncé. On réactive des connaissances antérieures des élèves ou, à défaut, on utilise les dictionnaires de la classe. Repérage et compréhension de la question (parfois une manipulation est nécessaire pour comprendre le sens de la tâche à effectuer).
- Phase de recherche individuelle (environ 15 à 20 mn). Chaque élève met, sans crainte, par écrit ses essais et ses tâtonnements. L'enseignant circule entre les élèves en écoutant leurs suggestions.

- Temps de recentrage collectif nécessaire, car les recherches s'épuisent un peu, il faut relancer l'envie d'aller plus loin. Les élèves reprennent la rédaction de leur recherche en essayant de développer d'autres idées. Les écrits sont relevés à la fin de la première séance.

Séance 2.

- Rappel du problème recherché, autour du vocabulaire, de la tâche à réaliser, des stratégies mises en œuvre....
- Les écrits annotés sont rendus aux élèves, et chacun continue individuellement à chercher et à rédiger ses idées (pendant 10 mn environ).
- Travail par groupe (le plus souvent par deux) : chaque élève a sa copie et, après négociation, un des élèves écrit la narration de leur recherche commune. Des éléments de preuve apparaissent à cette étape, lorsque chacun veut convaincre l'autre.

Séance 3.

- Compte rendu en classe en valorisant les différentes recherches. Pendant ce temps de correction, les élèves sont particulièrement attentifs.
- Présentation possible, au rétroprojecteur, d'exemples de stratégies intéressantes trouvées par les élèves.

À propos de la forme des énoncés, quelques étapes de la genèse de l'un d'entre eux.

Il est parfois nécessaire de modifier la rédaction du sujet de narration de recherche, pour pouvoir mieux s'adapter au langage des enfants du primaire.

Voici un exemple :

"Donnez-moi deux pains et une baguette", dit Jean au boulanger, et il paie 2,40 €.
"Pardon je voulais deux baguettes et un pain". Le boulanger les change et rend 0,30 € à Jean.
Combien le boulanger vend-il son pain et sa baguette ?

De nombreux élèves ne sont pas arrivés à s'identifier à ce registre langagier du dialogue. Par ailleurs de nombreux élèves du primaire ont pensé qu'on leur demandait le prix de la baguette et du pain ensemble. Ici le "et", qui avait le sens de "et puis", a pris le sens de "en même temps".

Nous avons donc, avec l'aide de professeurs d'école et de collège, proposé un nouveau sujet pour d'autres élèves.

À la boulangerie, Jean achète deux pains et une baguette et il paie 2,40 €.
Mais il s'aperçoit qu'il s'est trompé, il voulait acheter deux baguettes et un pain, le boulanger les change et rend 0,30 € à Jean.
Quel est le prix d'une baguette ? Quel est le prix d'un pain ?

Le sens de "rendre de l'argent" n'a pas été compris par tous, comme signifiant : c'est en moins dans le prix à payer.

De plus, de nombreux écrits ont fait apparaître qu'un enfant qui "se trompe" est un élément déstabilisateur pour certains élèves. Il fallait donc gommer cet aspect de l'énoncé.

Nous avons alors imaginé deux propositions, l'une avec deux enfants qui vont chez le même boulanger, l'autre avec le même enfant qui paie les deux achats à des moments différents chez le même boulanger.

Nous avons retenu la seconde :

À la boulangerie, Fred paie 2,40 € lorsqu'il achète deux pains et une baguette.
Il paie 0,30 € de moins lorsqu'il achète deux baguettes et un pain.
Quel est le prix d'une baguette ?
Quel est le prix d'un pain ?

Le changement de prénom vient du fait que, pour ces élèves le moniteur de volley qui vient à l'école toutes les semaines s'appelle Fred !

Nous pensions être au bout de nos peines, quand nous nous sommes aperçus que la majorité des élèves qui reformulaient l'énoncé, parlaient d'abord de l'achat et du prix après !

Par exemple :

Lorsqu'il achète deux baguettes et un pain, il paie 0,30 euros de moins.

En tenant compte de ces dernières remarques, l'énoncé modifié a été :

À la boulangerie, lorsqu'il achète deux pains et une baguette, Fred paie 2,40 €.
Lorsqu'il achète deux baguettes et un pain, il paie 0,30 € de moins.
Quel est le prix d'une baguette ?
Quel est le prix d'un pain ?.

À suivre .....

2. NARRATIONS DE RECHERCHE AU CYCLE CENTRAL DU COLLÈGE

Les narrations de recherche, pratiquées régulièrement, rythment la progression annuelle dans la classe. Par le choix des énoncés, elles s'intègrent aux programmes et permettent d'aborder différentes notions.

Nous présentons dans ce paragraphe des énoncés de narrations de recherche qui peuvent être proposés au cycle central. Nous les avons regroupés suivant l'objectif principal qui a justifié leur choix, mais ils permettent d'aborder bien d'autres notions. Cette liste n'est évidemment pas exhaustive.

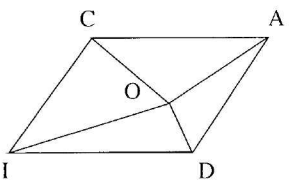
2.1. MISE EN DÉFAUT DES PREUVES PRAGMATIQUES : VISION ET MESURES

Les élèves se détachent encore difficilement des preuves pragmatiques que constituent le dessin et les mesures, aussi des problèmes sur les aires et les angles sont favorables à cette remise en cause. Un apprentissage de la démonstration en géométrie est facilité lorsque ce pas est franchi.

Énoncé 1.

CADI est un parallélogramme, O est un point intérieur à CADI.

Laquelle des deux surfaces a la plus grande aire : la surface grisée (COA et ODI réunies) ou bien la surface blanche (AOD et COI réunies) ?



Énoncé 2.

Paul a construit un triangle isocèle ABC de sommet principal A et dont l'angle en B mesure 61°. Il a placé un point D sur la demi-droite [AC), extérieur à [AC], tel que $CD = BC$. Il a joint B à D. Il dit que le triangle ABD est rectangle. Es- tu d'accord avec lui ? Pourquoi ?

2.2. APPROCHE EXPÉRIMENTALE EN GÉOMÉTRIE PLANE, ESSAIS-ERREURS SUCCESSIFS ET DÉMONSTRATION

Certains problèmes de géométrie favorisent particulièrement une démarche scientifique qui consiste à expérimenter, conjecturer, prouver. La première phase, qui est faite d'essais, d'erreurs, de tâtonnements, donne l'occasion à tous les élèves de produire un écrit, suivi par une recherche de preuve plus ou moins approfondie suivant leurs capacités.

Énoncé 3.

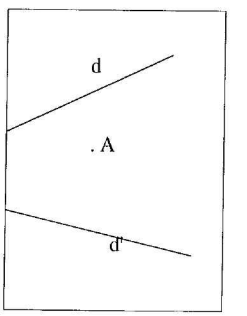
Problème sur les distances et les propriétés caractéristiques du rectangle.

Dans un triangle ABC rectangle en A, on place un point P sur l'hypotnuse. On trace le segment [PI] perpendiculaire [AB], I est sur [AB], et le segment [PJ] perpendiculaire [AC], J est sur [AC]. Si on dplace le point P sur l'hypotnuse, la longueur du segment [IJ] varie. O faut-il placer le point P pour que le segment [IJ] soit le plus court possible ?

Énoncé 4.

Problème sur les transformations, les théorèmes relatifs aux milieux de deux cotés d'un triangle, le théorème de Thalès etc.. (les procédures sont très variées suivant les positions du point A et des deux droites).

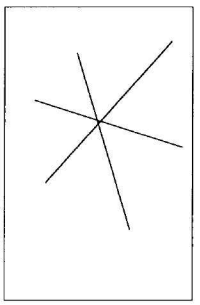
Construire la droite passant par le point A et le point d'intersection des deux droites sans utiliser de tracés en dehors de la feuille.

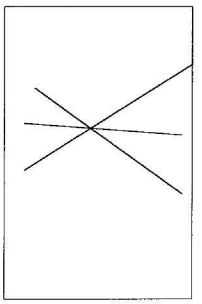


Un problème comparable, avec la recherche du centre de gravité, a été analysé au chapitre 3.

Énoncé 5.

Problème sur les hauteurs d'un triangle.





Pour chacune des figures ci-dessus, tracer un triangle qui admet les trois droites comme hauteurs

2.3. Approche du calcul littéral

Au cycle central, une progressivité des apprentissages doit être organisée pour amener les élèves à comprendre la nécessité de passer du calcul numérique au calcul littéral.

Avant l'acquisition de techniques opératoires ou de la résolution d'équations, tester la véracité d'une égalité, travailler les notions d'exemples et de contre-exemples, comprendre la nécessité d'une démonstration algébrique sont des pré-requis incontournables pour que les élèves ne soient pas rebutés par le calcul littéral et lui donnent du sens.

Des narrations de recherche sur ces thèmes permettent des débats en classe pendant lesquels sont abordées ces différentes notions.

Voici quelques énoncés sur ces sujets, on peut remarquer que les énoncés mettant en conflit deux personnages sont souvent assez motivants et porteurs de rédactions d'élèves intéressantes.

Énoncé 6.

On donne les expressions $A = 2 \times y + 1$ et $B = y \times y + 1$ dans lesquelles y est un nombre que l'on ne connaît pas.

Est-ce que ces deux expressions sont égales ? Justifier la réponse.

Énoncé 7.

Dialogue 1

Pierre et Laure ne sont pas d'accord.

Pierre dit : "Dans l'expression $n \times n - n + 11$ si l'on remplace n par n'importe quel nombre entier naturel, on obtient toujours un nombre qui n'a que deux diviseurs : 1 et lui-même".

Laure affirme le contraire. Qui a raison ?

Dialogue 2

À nouveau Pierre et Laure ne sont pas d'accord.

Pierre dit : "La somme de 2 nombres impairs consécutifs est toujours multiple de 4".

Laure affirme le contraire. Qui a raison ?

Énoncé 8.

Vérifier les égalités suivantes :

$$5^2 - 4^2 = 5 + 4$$
$$12^2 - 11^2 = 12 + 11$$
$$124^2 - 123^2 = 124 + 123$$

Quelle conjecture pouvez-vous faire ? Prouvez-la.

2.4. Mise en route de nouvelles notions et réinvestissement

Avant de commencer un cours sur les puissances, il est intéressant de lancer les élèves dans une recherche ne mettant en jeu que leurs connaissances sur la multiplication, les algorithmes des opérations et la numération décimale ; en effet, seule la définition de la notation exponentielle est nécessaire dans ce devoir. À cette occasion, un débat sur l'utilisation des calculatrices et leurs limites, est alors inévitable. Une étude détaillée de cette narration de recherche se trouve au chapitre 3.

Énoncé 9.

Si je calcule 13^1, le chiffre des unités est 3.

Si je calcule 13^2, c'est à dire 13×13, le chiffre des unités est 9.

Quel est le chiffre des unités de 13^3 ($13^3 = 13 \times 13 \times 13$), de 13^4, de 13^5, de 13^9 ?

Quel est le chiffre des unités de 13^{1998} ?

Après le cours sur les puissances, on peut également tester les acquis avec la narration suivante :

Énoncé 10.

Avec les symboles 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 on "fabrique" des nombres de 9 chiffres, toutes les répétitions sont permises (par exemple : 123 456 789 ; 111 222 333 ; 121 121 121 etc).

Il paraît que l'on peut en fabriquer un peu moins de 400 millions ! Est ce exact ?

Et si les répétitions ne sont pas permises, combien peut-on en fabriquer ?

2.5. Géométrie dans l'espace , repérage des obstacles à l'apprentissage

Au chapitre 3, nous avons analysé les difficultés rencontrées par les élèves lors de la recherche d'un problème de géométrie dans l'espace (points sur les faces d'un cube). L'énoncé de ce problème peut être donné en quatrième, après l'étude du théorème de Pythagore.

Avant un cours de géométrie dans l'espace, les élèves doivent être confrontés à ces difficultés de représentation des objets tridimensionnels par des dessins plans. L'enseignant peut ainsi faire un état des lieux et repérer les obstacles à tout nouvel apprentissage.

Énoncé 11.

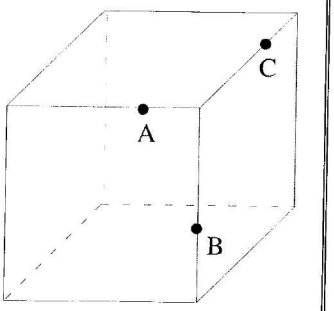
Un dessin en perspective cavalière (0,5 ; 60°) est donné aux élèves (la face avant est représentée par un carré de 10 cm de côté et les fuyantes mesurent 5 cm).

On a un cube de 10 cm de côté. On le partage en deux par un coup de scie, le coup de scie passe par les trois points A, B, et C indiqués sur le dessin du cube.

Le point A est à 3 cm d'un sommet.
Le point B est à 8 cm du même sommet.
Le point C est à 8 cm du même sommet.

On pose la surface ABC d'un des morceaux du cube sur une feuille.

Dessiner le contour ABC obtenu.



Énoncé 12.

Une salle de classe a pour dimension 7 m de long, 5m de large, et 3m de haut. Un fil est tendu verticalement du plafond au sol.

Une balle de revolver traverse la salle. Elle part d'un des coins du plafond et aboutit à la base d'un mur en son milieu. La balle se déplace en ligne droite à partir de ce coin et coupe le fil à 1,5m au-dessus du sol.

À quelle distance de chaque mur le fil est-il placé ?

3. LES NARRATIONS DE RECHERCHE ET LES PROBLÈMES FERMÉS AU CYCLE CENTRAL

Dans les chapitres précédents, nous avons travaillé les narrations de recherche à partir d'énoncés de type problèmes ouverts, mais lorsque les élèves ont pris l'habitude de rédiger de tels écrits, les narrations de recherche peuvent devenir un moyen d'expression également utilisé lors de la résolution de problèmes classiques ou "fermés". Ces problèmes du type "démontrer que" font référence au cours, et la démonstration a pour fonction d'expliquer ce qui peut être déduit des données de l'énoncé grâce à des théorèmes.

Lors de leur rsolution, l'lve se trouve face deux tches distinctes : la recherche des solutions (phase heuristique) et la rdaction des solutions (phase rdactionnelle), qui est la mise en forme dfinitive de la dmonstration.

Ces deux tches doivent tre distingues dans l'apprentissage de la dmonstration au cycle central car, demander trop rapidement aux lves des crits dans un langage mathmatique trs formel nous semble un obstacle leur apprentissage. Dans un premier temps il nous semble donc judicieux de leur offrir la possibilit d'exposer leur raisonnement sous forme de narration de recherche.

De plus, dans les pratiques habituelles, aucune production d'lve ne concrtise la premire phase de recherche, les devoirs sont pauvres d'informations concernant l'accs la dmonstration, ce qui rend difficile toute tentative de remdiation. Grce aux narrations de recherche, nos lves ont un outil de communication pour concrtiser cette premire phase en montrant l'enseignant l'volution de leurs raisonnements. Le dmarrage de leurs recherches est facilit, et ce premier crit, rdig dans un langage naturel, trs libre, nous renseigne sur le degr d'volution de l'lve, quant la comprhension du statut de la dmonstration, hors de tout formalisme.

Cependant dans ces problmes ferms, la rdaction de la recherche n'est pas une obligation, car pour certains lves le questionnement est trop simple et la solution trop vidente pour qu'ils dcrivent leur recherche. Mais suivant la difficult du problme, nous nous apercevons qu'ils sont heureux, parfois, d'avoir recours ce type de rdaction pour communiquer leurs rsultats.

Les problèmes étudiés sont de la forme suivante.

> Soit C, un cercle de centre O et de diamètre [AB]. Soit C', le cercle de diamètre [OA].
>
> P est un point du cercle C, différent de A et B, la droite (AP) coupe C' en I.
>
> 1°) Démontrez que les droites (OI) et (BP) sont parallèles.
>
> 2°) Démontrez que le point I est le milieu de [AP].
>
> Vous pouvez faire la narration de votre recherche.

En étudiant les écrits obtenus avec ces problèmes, nous avons retenu certains critères d'analyse qui nous permettent de ranger ces écrits suivant cinq types et par ce fait de dégager des profils d'élèves caractéristiques quant à leur approche de la démonstration.

3.1. CRITÈRES SUR LA FORME ET LE LANGAGE

- L'écrit est-il personnalisé ? (utilisation du "je").
- L'élève a-t-il utilisé un organigramme ?
- Les verbes utilisés traduisent-ils :
  - une observation visuelle : "je vois, je regarde, j'observe, je m'aperçois, je constate " ?
  - de l'incertitude, le doute, une prise de précaution : "je pense, je réfléchis, j'essaie, je crois, je remarque" ?
  - de l'assurance : "je trouve, je sais, je me rends compte, je déduis, je fais, je démontre" ?

3.2. CRITÈRES SUR LE CONTENU ET LES PROCÉDURES

- La figure est-elle décrite ?
- Les instruments de dessin sont-ils utilisés comme procédure de validation ?
- Relève-t-on une référence au mot "théorème" :
  - marquant la nécessité de sa présence "je vais chercher le bon théorème dans mon cours", l'élève passe en revue les théorèmes récemment étudiés pour trouver celui qui colle à la figure, montrant ainsi sa connaissance du schéma et de la forme d'une démonstration ;
  - pour citer un résultat du cours sans le positionner dans le contexte ?
  - pour citer un résultat du cours en le positionnant dans le contexte ?
- Observe-t-on des changements de stratégies ou prise de conscience d'erreurs ?
- Relève-t-on des confusions entre les données et leurs conséquences observables ?

3.3. TYPOLOGIE DES ÉCRITS

L'utilisation des critères ci-dessus et leurs interactions nous permettent de dégager cinq types d'écrits.

Les exemples qui sont présentés par la suite sont des extraits obtenus à partir de l'énoncé précédent.

Type 1. Écrit narration description.

Les écrits sont personnalisés avec des verbes visuels ou d'incertitude, aucun théorème du cours n'est énoncé, les observations sont validées par l'utilisation d'instruments de dessin. Grâce aux narrations de recherche, les élèves laissent une trace de leur travail, ces écrits montrent leur désarroi face à un problème de géométrie, car ils sont dans l'incapacité d'élaborer un raisonnement hypothético-déductif, restant dans une phase descriptive de la figure.

Observons le travail d'Alexandra, 4ième :

Je trace le cercle de centre O. Ensuite j'ai tracé le diamètre [AB], j'ai pris le milieu [OA] pour tracer le cercle C'. Par la suite j'ai placé un peu n'importe où, j'ai relié le point A et P. Ensuite j'ai placé le point I sur le cercle C'.
Pour démonter que (OI) et (PB) sont parallèles. Au début je croyais que le triangle était quelconque. Mais pour en être sûre, j'ai pris l'équerre pour savoir s'il n'était pas rectangle. Et je me suis aperçu qu'il était rectangle.
Alors j'ai rflchi et rcit les thormes du triangle rectangle pour savoir quel tait le bon thorme. Mais aprs j'ai ouvert mon cahier car de tte je mlangeais tout.

Type 2. Écrit pseudo - démonstration.

Les écrits sont très souvent impersonnels, montrant de l'assurance ; la rédaction est sèche, très courte, très correcte sur la forme, sans prise de conscience d'erreur, ni changement de stratégie, malgré la présence quelquefois d'un organigramme. Ces copies présentent une solution erronée et non une recherche, on se trouve déjà dans la phase de rédaction, car la forme et le vocabulaire employés sont ceux attendus dans une démonstration, mais ils semblent vides de sens, sans analyse de la figure, ni justification du choix du théorème.

Observons le travail de Vivianne, 4ième :

1) Dans un triangle la droite qui passe par les milieux de 2 côtés est parallèle au 3ième côté
- triangle APB, I milieu de AP et O milieu de AB → donc (OI) // (BP)
2) Dans un triangle, la droite qui passe par le milieu d'un côté et qui est parallèle à un autre côté, passe par le milieu du 3ième côté.
- triangle APB, O milieu de AB et (IJ // (PB) donc → i milieu de AP

Type 3. Écrit narration de recherche de théorèmes.

Les écrits sont personnalisés, utilisant des verbes visuels ou d'incertitude, aucun verbe d'assurance n'apparaît. Rédigés dans un langage naturel et agréable, caractéristique des narrations de recherche, ces écrits traduisent une recherche très active, où les élèves s'impliquent, en montrant leurs doutes ; la référence à un théorème est toujours présente, mais le travail n'est pas abouti et les élèves en ont conscience.

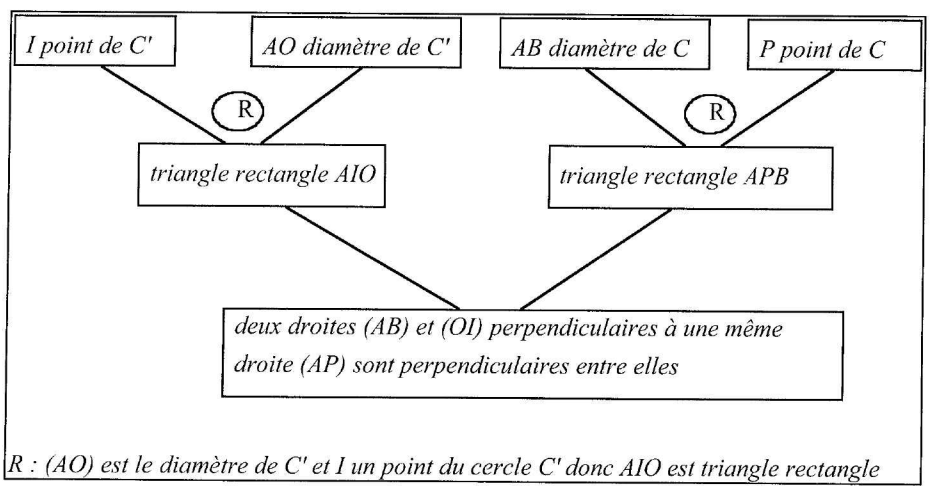
C'est le cas de Pierre, 4ième :

Je pense qu'il faut d'abord chercher si le problème peut être résolu par un théorème. Je remarque aussi que l'hypoténuse du triangle ABP est un diamètre du cercle C et que le point opposé à cette hypoténuse est sur le cercle C' donc le triangle ABP est rectangle (d'après le théorème sur les triangles rectangles). J'ai trouvé un obstacle : je croyais qu'il fallait se servir des théorèmes des milieux mais je me rends compte que pour ces deux théorèmes on a besoin de savoir que I est le centre de (AP) et c'est la question d'après.
Je repars donc à ma piste du début et je me rends compte que c'est pareil pour le triangle AIO.

Type 4. Écrit organigramme.

Ces écrits présentent une solution en général correcte, sous forme d'organigramme. Les énoncés des théorèmes sont rédigés dans le diagramme ou en annexe, il s'agit d'écrits très pertinents de recherche avant la mise en forme de la démonstration.

Le travail de Maxime, 4ième :



Type 5. Écrit solution.

Ces écrits sont impersonnels ou presque, leur forme est à rapprocher des écrits de type 2, mais ici le raisonnement est correct et ils constituent la phase finale de la résolution du problème : la rédaction de la solution, comme dans la copie de Marie Amélie, 4ième :

1) (OI) // (BP) car deux droites perpendiculaires à une même droite sont parallèles entre elles.
Je sais que (OI) est perpendiculaire à (AP) parce que le cercle C' circonscrit au triangle AID a pour diamètre un côté du triangle (AO) alors le triangle AID est rectangle en I. (BP) est perpendiculaire à (AP) parce que le cercle C circonscrit au triangle APB a pour diamètre un côté du triangle (AB) alors le triangle APB est rectangle en P.
2) I est le milieu de [AP] car dans un triangle la droite qui passe par le milieu d'un côté et qui est parallèle à un autre côté passe par le milieu du 3ième côté.

3.4. Exploitation de ces écrits

Dans une classe, nous sommes très souvent en présence de ces cinq types d'écrits, traduisant l'hétérogénéité de nos élèves face à la résolution d'un problème. Les types 1, 3, 4 constituent des écrits médiateurs facilitant l'accès au type 5 ; ils ne sont pas des passages obligés mais on observe que l'accès au type 5 n'est pas définitif et, suivant la nature du problème posé, il peut y avoir des déplacements vers d'autres types en fonction de la difficulté relative du questionnement.

En cours d'année, nous pouvons noter une nette diminution des écrits impersonnels (type 2), nous retrouvons ces élèves dans des écrits de type 1 ou 3, c'est à dire qu'ils n'arrivent pas à produire toujours une solution correcte, mais leurs écrits deviennent personnels et descriptifs, ils n'utilisent plus de langage "pseudo-mathématique" mal maîtrisé.

À travers nos critères et notre essai de classification, nous pouvons noter divers stades de l'élève, quant à la compréhension du statut de la démonstration, au-delà de tout formalisme. Par le passage d'un type à l'autre nous pouvons repérer l'évolution de certains d'entre eux, et par ce fait engager un travail portant plus spécifiquement sur une phase particulière de la résolution d'un problème (phase heuristique ou rédactionnelle).

En conclusion, on peut noter qu'avec les narrations de recherche, qui leur donnent un espace de liberté, les élèves appréhendent mieux l'enjeu de la démonstration et leurs recherches sont plus pertinentes. L'implication personnelle, que nécessitent ces travaux, leur permet d'être plus actifs et plus critiques envers eux-mêmes, ils peuvent, dans tous les cas, démarrer une recherche et montrer l'état de leur travail à l'enseignant et ils acquièrent surtout une plus grande aisance d'expression avec un esprit plus critique sur leurs productions écrites.

4. TRAVAIL RÉFLEXIF DE GROUPE AU COLLÈGE

4.1. PROBLÉMATIQUE SPÉCIFIQUE

Nous faisons l'hypothèse que l'écriture, dans une même année scolaire, de plusieurs narrations de recherche suivies de synthèses en classe entière permet à un élève :

- une évolution par rapport aux stratégies mises en œuvre lors de la recherche d'un problème ;
- certains déplacements cognitifs à travers les modes d'argumentation ;
- certains déplacements dans l'attitude par rapport à l'apprentissage ;
- le développement de compétences linguistiques.

On peut penser en outre qu'un travail réflexif de groupe sur les écrits déjà produits et une réécriture vont accélérer le processus d'évolution.

L'idée de retravailler des productions d'élèves n'est pas originale mais les écrits obtenus lors d'une narration de recherche sont très riches autant sur le plan des mathématiques que sur le plan de l'engagement personnel. En effet, les élèves y montrent leurs essais, leurs erreurs et leurs changements de stratégie, on y trouve également leurs impressions, leurs hésitations et leur relation à la tâche demandée.

De plus, les écrits provenant d'élèves de la classe, le travail prend alors en compte la réalité des connaissances déjà disponibles et les conceptions erronées de certains d'entre eux.

L'enjeu est alors de ne pas modifier, par le nouveau dispositif, le contrat didactique : en effet, l'activité narration de recherche permet d'obtenir des écrits personnels et vrais, car par essence privés puisque seul le professeur en a connaissance.

C'est donc pour cette raison qu'il paraît indispensable de faire un montage d'extraits anonymes afin de préserver les élèves concernés. En effet, encore jeunes puisqu'ils sont au collège, il est à craindre qu'ils n'aient pas le recul nécessaire pour relativiser les propos de certains camarades et qu'ils ne fassent plus confiance à l'enseignant si leur travail est ainsi soumis à la critique de leurs pairs.

Pour éviter cet écueil, nous pourrions choisir des extraits de narrations faites par des élèves d'une autre classe, mais la présence des auteurs va permettre de les interpeller indirectement.

4.2. DESCRIPTION DU DISPOSITIF PÉDAGOGIQUE

Nous donnons l'exemple, ici, d'un travail mené en classe de 3ème. Nous avons choisi comme sujet de la narration de recherche initiale le problème déjà mentionné au chapitre 3.

Construire deux carrés de telle sorte que le deuxième ait son aire double de celle du premier.

En ce début d'année, on s'attend à pouvoir repérer deux pistes fondamentales à travers le problème posé :

- le statut des mesures dans les démonstrations;
- la compréhension des nombres non décimaux.

De plus, connaissant les difficultés que ce problème a engendrées au cours de l'histoire, on peut penser que les élèves vont se heurter aux mêmes obstacles ce qui permettra de donner une nouvelle dimension aux erreurs commises.

Il est important de noter qu'aucune notion nouvelle de 3ème n'avait encore été abordée avant ce travail.

Le travail proposé aux élèves s'est déroulé selon les quatre phases suivantes :

Phase 1.

Écriture personnelle, à la maison, de la narration de recherche concernant le problème posé au départ.

Phase 2.

Aprs correction des copies par l'enseignant, compte-rendu partir d'un **travail collectif** sur le texte de Platon extrait de Mnon [26] relatant une fausse piste (qui est celle suivie par la majorit des lves au dpart du travail de recherche), ainsi que la solution gomtrique du problme.

Phase 3.

Par groupes hétérogènes de 3 ou 4, travail critique oral d'extraits anonymes des productions des élèves de la classe, puis synthèse écrite de chaque groupe. Le questionnement proposé était le suivant :

Etes-vous d'accord avec l'auteur de chaque extrait ?
Si oui, justifiez son affirmation, sinon expliquez l'erreur qui a été commise.

[26] PLATON ; *Ménon* ; Éditions Garnier Flammarion.

Phase 4.

Mise en activité et non pas répétition, grâce à la production d'une nouvelle narration de recherche individuelle et en temps limité, du problème dont l'énoncé suit, permettant un réinvestissement possible des activités précédentes :

Construire deux carrés de telle sorte que l'aire du deuxième soit 8 fois plus grande que celle du premier.

Phase 5.

Afin de vérifier le réinvestissement dans le temps, productions ultérieures de nouvelles narrations de recherche individuelles sur des sujets très différents, par exemple :

Gertrude pense que : $(a + b)^2 = a^2 + b^2$ Es-tu d'accord avec elle ?

4.3. ÉVOLUTION DES ÉLÈVES

Comme le montrent les différents extraits retenus ci-après, on ne peut mettre en évidence une évolution globale après un travail réflexif de groupe lors d'une nouvelle narration de recherche sur un sujet voisin. Une étude statistique sur une population peu nombreuse ne permet pas de conclure clairement. Toutefois, trois postures semblent se dégager à l'analyse des différents extraits.

Posture 1.

L'élève ne fait pas de lien avec les expériences précédentes, pourtant récentes. Il reproduit des stratégies identiques et parvient à un blocage analogue. Tout travail paraît être pour lui un éternel recommencement.

C'est le cas pour Bénédicte. Dans sa première narration on trouve :

J'ai d'abord construit un carré de 4cm et ensuite j'ai mesuré son aire, ça m'a donné 16 cm^2. Donc si je fais un carré qui doit avoir le double de l'aire du premier, je dois normalement trouver 32 cm^2. Je vais doubler les côtés du carré donc de 4 je passe à 8. *Son aire : 64 cm^2 $c \times c = 8 \times 8 = 64$* *Ça ne marche pas.*

Puis dans sa deuxime narration :

Je fais 16×8 ça me donne 128. Ensuite je fais 128:2 ça me fait 64. Donc je devrai faire un carré avec 64 cm de côté. Mais en fait c'est faux parce que 64×64 = 4096. Il faut que je change d'idée.

Posture 2.

L'élève évolue à la marge sans faire réellement allusion aux expériences vécues. Il fait un léger pas de côté dans ses conceptions.

C'est par exemple le cas de Déborah qui, concernant la stratégie, ne s'appuie ni sur les remarques du groupe ni sur ses propres remarques et parvient à un résultat du même type dans sa deuxième production. Par contre, dans cette dernière, elle indique clairement qu'elle ne se trompera plus dans le calcul de l'aire du carré.

Observons sa première narration :

L'aire du 1er carré est de 9cm² → *4,5 et 4,5 = 9*
donc il ne reste plus qu'à faire un carré de 4,5cm de côté et l'aire sera le double que celle du 1er carré!
Et voilà j'ai fait mon carré de 4,5cm
4,5×2 = 9 ; 9 ×2 = 18

La rponse du groupe lors de la phase 3 est la suivante :

La première hypothèse est fausse car l'aire du premier carré est égale à 9cm², l'aire du second carré sera 18 cm² et comme 4,5² ≠ 18 alors le côté du 2ème carré ne sera pas 4,5.

La faute est que la personne qui a fait ça a ajouté deux valeurs et a dit que ça donne une aire

Observons sa deuxime narration :

Voilà j'ai fait un carré de 1cm de côté
Je sais que pour calculer l'aire d'un carré il faut faire côté fois côté donc je vais le faire = 1× 1 = 1 l'aire de mon carré = 1cm²
Maintenant je veux faire un carré qui est huit fois plus grand donc normalement ça devrait faire 1×8 = 8 → le résultat huit fois plus grand
L'aire du départ ↑
Mon carré doit avoir pour côté 8cm

Voilà je pense avoir fait un carré 8 fois plus grand que le précédent.
$8 \times 8 = 64 \quad \rightarrow \quad 64cm^2$

Ce que j'ai fait est faux car 64 n'est pas huit fois plus grand que 1 !

Il y a bien eu déplacement au niveau de l'apprentissage.

C'est également le cas de Grégory qui sans changer de stratégie s'approprie le mode d'argumentation du groupe. Commençons par sa narration n°1 :

Je vais essayer une autre technique.
Je calcule l'aire du 1er carré $1,6 \times 1,6 = 2,56$
Je calcule l'aire du second carré $2,3 \times 2,3 = 5,29$
Je regarde si l'aire du second carré est le double du 1er

$2,56 \times 2 = 5,12$ ce n'est pas bon on ne peut pas le faire c'est impossible

La réponse du groupe dans la phase 3 est la suivante :

Le dessin a l'air d'être juste mais les calculs sont faux. Ils ne correspondent pas au dessin. Les calculs ne sont pas précis.
Les calculs sont faux mais le dessin est juste car le plus grand carré fait 8 carreaux d'aire 8 demi-carré + 4 carré et le petit carré fait 4 carreaux d'aire

Observons la deuxime narration de Grgory :

Je vais construire le carré dont les côtés sont du 1er carré et je vais les mettre côte à côte.
J'ai pris la moitié du 1er carré et j'en ai pris un autre je les ai mis côte à côte et je les ai mis sur les côtés du carré a ;
Je calcule l'aire $5,5 \times 5,5 = 31,35cm^2$
C'est à peu près l'aire du second carré que j'avais trouvé parce que l'aire est de $32cm^2$ et elle est de $31,36cm^2$ je vais dire que c'est bon
J'ai compté tous les carreaux j'ai trouvé 8 carrés alors c'est bon parce qu'il fallait faire 8 fois le premier carré et qu'à la fin ça fasse un carré

Posture 3.

L'élève remet explicitement en cause ses conceptions précédentes, cite même parfois le travail qui lui en a fait prendre conscience. Il est donc capable d'utiliser le travail précédent et de mettre en relation les différentes activités menées en classe.

La copie d'Élodie en est un exemple. On peut remarquer que dans son premier travail les stratégies d'approche étaient nombreuses et variées et ses échecs tout aussi nombreux. Le travail en commun lui a permis de prendre connaissance de stratégies pertinentes qu'elle n'avait pas abordées, elle réinvestit immédiatement cette approche en remettant en cause ses conceptions erronées.

Observons sa première narration :

Soit x les longueurs du carré et y l'aire du carré

$x \times x = y$

le double $(x + a) \times (x + a) = y + a^2$

donc $(3 + a) \times (3 + a) = 9 + a^2 = 18$

Rponse du groupe en phase 3 :

Faux car quand on fait la factorisation $(x + a) \times (x + a) = y + a^2$

Alors qu'on doit faire

$x^2 + a^2 + xa + ax = y + a^2 + xa + ax \neq y + a^2$

Et maintenant la narration d'lodie en phase 5 :

Gertrude pense que $(a + b)^2 = a^2 + b^2$

Donc je vais factoriser

$(a + b) \times (a + b) = a^2 + b^2$

$a^2 + ab + ba + b^2 = a^2 + b^2$

Je ne suis pas d'accord avec elle car elle a oublié ab et ba dans le résultat. Elle a fait la même erreur que moi j'avais fait pour la narration de recherche du carré. Elle aurait dû marquer dans le résultat :

$(a + b)^2 = a^2 + b^2 + ab + ba$

En conclusion, bien qu'il n'y ait pas d'évolution pour tous, on a tout de même un grand nombre d'élèves qui remettent en cause certaines conceptions ou certaines stratégies après un travail réflexif de cette nature.

La multiplication d'expériences de ce type dans une même classe peut amener certains élèves à évoluer et à peut-être changer de posture.

5. ANALYSE DU TRAVAIL DE GROUPE AU LYCÉE

5.1. PROBLÉMATIQUE SPÉCIFIQUE

Dans le même esprit qu'au collège, il s'agit de s'intéresser aux effets de la socialisation sur la reformulation d'un écrit d'élève de lycée : on se demande à nouveau, mais à l'aide d'un dispositif pédagogique différent, si un travail réflexif de groupe sur les écrits déjà produits, ainsi qu'une réécriture, vont accélérer le processus d'évolution. L'expérimentation étant conduite dans une classe de 1ère S, on étudiera plus particulièrement les déplacements observés à l'issue du travail de groupe sur les modes d'argumentation : raisonnement inductif, implication des cas particuliers dans le raisonnement, raisonnement déductif, capacité à généraliser.

5.2. DESCRIPTION DU DISPOSITIF PÉDAGOGIQUE

Le travail s'est déroulé selon quatre phases :

Phase 1. Écriture personnelle de la narration de recherche concernant le problème posé (travail fait par l'élève à la maison).

Phase 2. Sélection par le professeur de huit copies d'élèves (les élèves - auteurs).

Après une lecture sans correction ni annotation, le choix des copies a été guidé par notre volonté d'étudier les déplacements cités plus haut. Deux critères principaux ont donc été retenus :

- le type de raisonnement produit ;
- la qualité de la narration : lisibilité, type d'écriture qui permet ou non de retrouver les modes de pensée de l'élève.

Phase 3. Travail de groupe.

L'expérimentation a eu lieu lors d'une séance de travaux dirigés, en demi - classe. Dans chacune des demi - classes, quatre groupes se sont constitués librement autour de l'auteur d'une des copies sélectionnées. Ces regroupements par affinité nous ont paru en effet préférables afin de mettre l'élève - auteur dans de bonnes conditions de confiance.

Cette séance s'est déroulée en deux temps :

- Travail individuel.

  Chaque élève lit (ou relit lorsqu'il s'agit de l'auteur) entièrement la copie (photocopiée) de l'auteur et prend des notes sur la troisième partie de la narration (comment expliquer sa démarche à un camarade et le convaincre). Pour l'aider dans cette démarche, un questionnaire est présent au tableau :

  - Y a-t-il une troisième partie ?

- Y a-t-il un résultat ? Est-il juste ?
- La rédaction aide-t-elle à la compréhension ?
- La preuve est-elle convaincante ?

- Travail collectif.

  Ces élèves mettent en commun leurs remarques sur la copie de l'auteur et dialoguent avec celui-ci. Un des membres du groupe prend des notes. L'objectif de cette discussion est de donner à l'élève - auteur les moyens de réécrire et donc si possible d'améliorer la troisième partie de la narration.

Phase 4. Réécriture par les huit élèves - auteurs de la troisième partie de la narration (travail fait à la maison).

5.3. SUJET DE LA NARRATION DE RECHERCHE

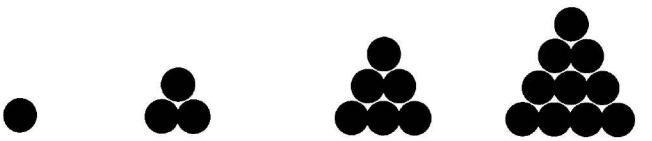
Le choix du sujet répond aux critères généraux des narrations de recherche cités dans le chapitre 2.

En 1^{ère}S, classe où l'on doit rentabiliser le temps scolaire, nos choix se portent souvent sur des sujets qui permettent de démarrer l'apprentissage d'une nouvelle notion, ou bien de faire la synthèse de thèmes précédemment étudiés.

Pour permettre d'étudier les modes d'argumentation, nous avons choisi un sujet présenté dans un cadre numérique :

Les nombres entiers triangulaires.

On dit que les nombres entiers 1, 3, 6, ...
sont triangulaires car on peut les représenter ainsi :



Ce sont les quatre premiers nombres triangulaires.

Complter le tableau suivant :

Ordre des nombres triangulaires	Nombres triangulaires correspondant
1ier	1
2ime	3
3ime	6
4ime	
5ime	
6ime	
7ime	
12ime	
20ime	
108ime	
nime	

L'analyse des différentes procédures employées par les 31 élèves lors de la première phase (avant le travail de groupe), et des différents modes d'argumentation, n'est pas première dans ce travail centré sur la socialisation ; nous avons tout de même choisi de la présenter au paragraphe 5.6.

5.4. Analyse de l'expérimentation

Sur le dispositif.

Les élèves ont assez bien respecté le contrat ; dans 6 des 8 groupes, un compte rendu des discussions a été remis à l'auteur. Il semble que les élèves - auteurs ont accepté le regard et la critique des autres sans problèmes apparents.

Le choix des copies reste toutefois délicat eu égard à la personnalité de l'auteur.

Sur les déplacements observés.

Parmi les 8 groupes :

- Deux auteurs ont vu leur procédure correcte non contestée, ils l'ont donc conservée tout en améliorant l'écriture de leur narration.

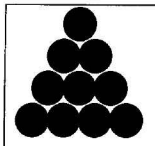
- Deux auteurs conservent leur procédure pourtant simplement calculatoire, améliorent la qualité de l'écrit mais leur preuve n'est pas plus convaincante.

C'est le cas d'Éléonore : dans la première narration, elle décrit bien sa recherche, teste les procédures 6 et 9 (voir paragraphe 5.6.) qui n'aboutissent pas et elle prend conscience qu'elle ne peut justifier la formule correcte que lui a donnée un camarade.

Au début de mon devoir j'ai réussi à remplir le tableau en majorité c'est à dire jusqu'au 20ème. Ma méthode était la suivante je faisais une addition : prenons un exemple : pour le 12ème j'ai fait 1+2+3+...+12=78. Cette méthode est trop longue pour de grands nombres comme 108 ou autres. Il a donc fallu en chercher une autre pour essayer d'être plus rapide.
J'ai donc opéré de la manière suivante :
$(10 \times 10) + (10 \times 20) + ... + (10 \times 90) + 100 + 101 + ... + 108 + (45 \times 10) = 5886$ pour le 108ème. Mais cela ne marche pas tout le temps, les risques d'erreurs sont grands : cette méthode est aussi à rejeter.
[...] Après tous ces essais, j'ai obtenu la formule générale par quelqu'un . A partir de cela, j'ai essayé de retrouver la formule mais sans la comprendre : je n'ai donc pas réussi à établir la formule en utilisant ce que je savais et je ne pourrai en aucun cas l'expliquer à un camarade.

Dans la deuxième version, le dessin fait son apparition pour tenter de justifier la formule ; mais le passage au cas général est trop rapide et la justification s'apparente davantage à une description. La preuve n'est pas convaincante.

Pour expliquer mon résultat je prends un exemple : ici, n=4, nous connaissons le résultat 40.



On prend n la dernière ligne donc la base du triangle. On prend 1 la première ligne donc toujours 1. Sur l'exemple n+1 = 4+1=5. On a 2×5 *ou* $2 \times (4+1)$ *mais on s'aperçoit que* $2 = \frac{4}{2}$ *donc on remplace* $\frac{4}{2} \times (4+1)$ *ou* $4(\frac{4+1}{2})$.

On remplace 4 par n et on trouve $n(\frac{n+1}{2})$. *Cette formule marche tout le temps. Dans le cas général on prend la base du triangle n (dernière ligne). On y ajoute 1 car c'est la première ligne ou encore le sommet. Dans la pyramide, le résultat de n+1 se retrouve un certain nombre de fois. Comme pour de grands nombres c'est trop long de compter ceci, on prend la fraction* $\frac{n}{2}$.

À partir de là, on établit la relation $\frac{n}{2}(n+1)$ *que l'on simplifie en* $n(\frac{n+1}{2})$.

- Quatre auteurs ont modifié leurs procédures pour une meilleure stratégie :

- Trois d'entre eux sont passés d'un raisonnement uniquement inductif à un raisonnement déductif . C'est la cas de Damien : dans sa première narration, il met en œuvre la procédure 6 (voir paragraphe 5.6.), il montre à plusieurs reprises qu'il a conscience des limites des formules trouvées et de l'impossibilité de démontrer leur équivalence .

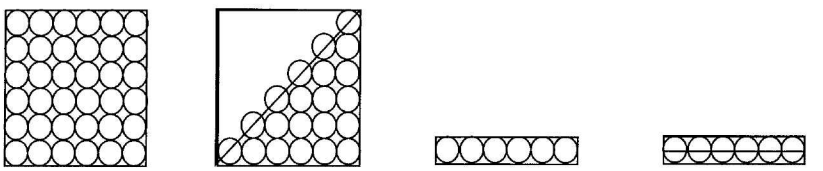
Le 4ème c'est 1+2+3+4=10 car en décomposant, le 1er est 0+1=1 ; le 2ème est 1+2=3 ; le 3ème est 3+3=6. C'est donc égal à 4+3+2+1. On a alors cette formule : pour le nième : n+(n-1)+(n-2)+...+2+1.[...] Mais cette formule, bien que je l'aie trouvée immédiatement est beaucoup trop longue à appliquer, même pour le 20ème qui est un nombre relativement petit. Alors imaginez pour le 108ème. Il a donc fallu trouver une formule plus applicable. A force d'essais j'ai trouvé que celle-ci était : $\frac{n^2+n}{2}$. *Tout d'abord, j'ai cru qu'il fallait juste ajouter les nombres triangulaires précédents à celui que l'on voulait trouver : exemple : pour le 4ème : 1+3+6=10. Mais j'ai vite compris que cela se révélait faux ; Contre-*

exemple : pour le 5ème 1+3+6+10=20 15. [...] Ces 3 formules étaient fausses. J'ai eu plus de chance avec mon 4ème essai $\frac{n(n+1)}{2}$ *que j'ai développé en* $\frac{n^2+n}{2}$ *[...] Après d'autres vérifications avec de grands nombres, j'en ai déduit que cette formule était bonne.[...] Je ne peux malheureusement pas expliquer l'égalité de ces deux formules car je n'ai moi-même pas trouvé la relation. Mais je peux affirmer que celles-ci sont justes.*

Dans la deuxième version, la procédure devient déductive et est étayée par le graphique. Le travail de groupe a permis à l'auteur de comprendre et d'utiliser une procédure qui a conduit à la preuve, mais la rédaction est bien pauvre.

La formule que j'ai trouvée peut se résumer par un schéma avec des boules, comme sur le sujet. Prenons n=6 :

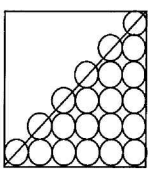
1) 2) 3) 4)



n^2 *boules* $\frac{1}{2}n^2$ *boules :* $\frac{n^2}{2}$ *n boules* $\frac{1}{2}n$ *boules :* $\frac{n}{2}$

C'est l'addition de 2) et 4) ; c'est à dire :

n^2 *boules* $+\frac{n}{2}$ *boules :* $\frac{n^2+n}{2}$



- Une élève, Sabine, a changé de procédure à la suite d'un fructueux travail de groupe. Dans la première narration, elle met en œuvre la procédure 2, présente fort bien sa recherche et sa méthode étayées par des graphiques, mais elle n'a pas conscience des limites de la formule trouvée.

Je remarque à l'aide des dessins que la base et la hauteur s'agrandissent de 1 boule, 2 boules, 3 boules...pour le 1er nombre triangulaire, le second, le troisième. Après quelques autres petits dessins, je me suis aperçue qu'en fait à chaque étage de la pyramide on ajoutait une boule. Mon observation ne s'appliquant pas au

dernier étage ne comportant qu'une boule, j'ai observé que pour le 6ième nombre triangulaire il y avait 6 étages et que lorsqu'on « montait » dans les étages on retirait une boule pour arriver au sommet ne comportant qu'une boule. Mon observation s'est confirmée pour les autres nombres triangulaires. J'en ai tiré la relation suivante :

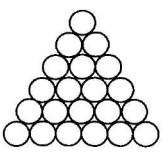
n étant un nombre triangulaire : $n+(n-1)+(n-2)+(n-3)+(n-4)+\ldots+(n-(n-1))$.

Un exemple numérique m'a permis de m'apercevoir que l'on additionne en fait le nombre n à tous les nombres inférieurs jusqu'à 1.

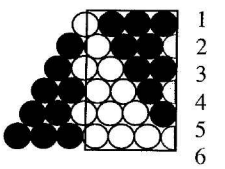
Cette relation est un peu longue à appliquer pour le 108ème nombre triangulaire mais je n'en ai pas trouvé d'autres.

La critique collective de la première démarche apparaît clairement dans le deuxième écrit. Le dessin est mis en avant pour une tentative de justification et la procédure 3 est mise en place collectivement alors qu'aucun des membres du groupe n'avait pensé à cette méthode auparavant.

La formule trouvée était trop longue pour être appliquée à des nombres importants. Nous en avons cherché une autre plus adaptée. Audrey nous a énoncé celle du livre $\frac{n^2+n}{2}$. *Nous avons donc cherché à l'expliquer par des dessins.*



Ces boules peuvent être organisé d'une autre manière pour obtenir un rectangle.



Soit n le nombre des boules de la base (ici 6). On s'aperoit que largeur du rectangle est gal $\frac{n}{2}+\frac{1}{2}$ *boule. Donc :* $l=\frac{n+1}{2}$ *la demi - boule tant reprsent en gris. On constate que la longueur du rectangle est aussi form de 6 boules. Ceci est d au nombre d'tages correspondants au numro du nombre triangulaire.*

Cette remarque est valable pour les autres nombres triangulaires. D'o $L = n(=6)$.

L'aire d'un rectangle est $l \times L$. *Donc ici :* $\frac{(6+1)6}{2}=\frac{6^2+6}{2}$.

En généralisant avec $6 = n$ *on obtient bien :* $\frac{n^2+n}{2}$.

Sur la socialisation.

Les élèves semblent limités dans leurs attitudes critiques de socialisation à propos de l'écrit proposé. Il y a essentiellement un discours du type : "Pourquoi tu as fait ça, moi la solution je l'ai faite comme ça...". Ils ne cherchent pas à vraiment comprendre la démarche de l'autre, mais il semble que la connaissance de l'écrit de l'autre les renvoie à eux-mêmes et permette de renforcer leurs propres idées[27].

En utilisant une métaphore chromatique, l'élève 1 a suivi une démarche bleue, l'élève 2 une démarche jaune ; ce dernier, à travers son filtre jaune en vient à critiquer une démarche qu'il voit verte.

On peut penser qu'en mathématiques, la lecture critique ne peut s'exercer que si on a déjà compris le problème. De plus l'élève a davantage pour objectif de résoudre le problème et non d'améliorer l'écriture ; l'habitude n'est pas de se corriger sur ce point, ni de corriger l'autre.

Dans un groupe, la socialisation a permis de découvrir en commun une procédure à laquelle aucun élève n'avait pensé. Il peut donc y avoir un parcours cognitif dans un travail de groupe grâce à des paramètres sociaux et affectifs.

5.5. CONCLUSION

Les premiers résultats de cette pré-expérimentation nous permettent de mettre en avant l'apport du travail de groupe sur la réécriture par un élève d'une narration. Il semble que les socialisations privées (les élèves entre eux quand ils rendent leur devoir), les socialisations familiales (le devoir a été fait à la maison) se trouvent catalysées par le travail de socialisation proposé par l'enseignant pendant le temps de classe.

Des questions restent toutefois posées, qui mériteraient de nouvelles expérimentations :

- Les attitudes repérées sont-elles les mêmes selon que l'auteur est un bon élève ou non ?
- Qu'en est-il des phénomènes de majorité dans un groupe ?
- Une majorité pourrait-elle convaincre avec une idée fausse ?

Il faudrait également s'interroger, comme dans la problématique du travail réflexif de groupe en collège, pour savoir si l'élève qui a progressé grâce à ce travail de groupe, va pouvoir réinvestir ces progrès dans d'autres situations.

---

[27] On trouve des remarques comparables dans "Pour une mathématique vivante en seconde" (Publication N°27 de l'A.P.M.E.P.) à propos de "La copie de Dominique".

5.6. ANNEXE. LA NARRATION DE RECHERCHE DE LA PREMIÈRE PHASE : ANALYSE DES PROCÉDURES ; DIFFÉRENTS MODES D'ARGUMENTATION.

Analyse des procédures.

Comptage effectif des boules.

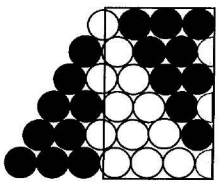
Procédure 1. Ajouter ligne.

Lorsque on ajoute une $p^{ième}$ ligne, on fabrique le $p^{ième}$ nombre triangulaire et celui-ci augmente de p. Cette procédure conduit à la formule : $N_n=N_{n-1} + n$.

Procédure 2. Compter et ajouter ligne.

Lorsque on ajoute une $p^{ième}$ ligne, le nombre triangulaire augmente de p. On compte à partir du premier nombre triangulaire 1.
Cette procédure conduit à la formule: $N_n = 1 + 2 + 3 +\ldots+ n$.

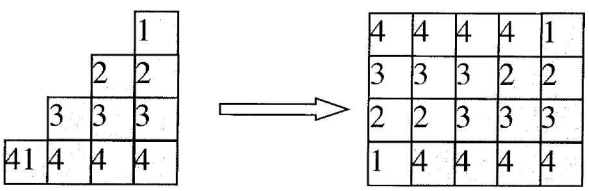
Procédure 3. Transformer triangle en rectangle.



Cette procédure conduit à la formule :

$$N_n = (\frac{n}{2} + \frac{1}{2}) \times n$$

Procédure 4. Ranger les boules dans des carrés ; former un rectangle.



Cette procédure conduit à la formule : $N_n = \frac{n(n+1)}{2}$

Recherche d'une relation à partir du tableau.

Procédure 5. Proportionnalité.

L'élève émet l'hypothèse, la confronte aux exemples dont il dispose, puis la rejette.

Procédure 6. Induction directe.

L'élève émet une hypothèse autre que la proportionnalité qui est confirmée par les résultats qu'il peut contrôler.

Cette procédure conduit à la formule: $N_n = N_{n-1} + n$ ou à : $N_n = 1 + 2 + 3 + \ldots + n$ et le plus souvent à: $N_n = \frac{n(n+1)}{2}$.

Procédure 7. Merci le livre.

L'élève se doute qu'il y a un rapport avec un chapitre non encore abordé dans le cours et va chercher secours dans le livre.

Transformation d'une formule.

Procédure 8. Simplification par symétrie.

L'élève qui a déjà un résultat à partir de la procédure 2 veut réduire le nombre de ses calculs. Il y parvient en sommant les termes de la progression arithmétique.

Procédure 9. Simplification par regroupement.

À partir de $N_n = 1 + 2 + 3 + \ldots + n$, l'élève réduit le nombre de calculs en regroupant les termes consécutifs de 1 à 9, puis de 10 à 19, de 20 à 29 etc... et constate que les résultats 45, 145, 245 sont les termes d'une suite arithmétique.

Répartition des procédures pour 100 élèves.

Procédure	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Nombre	29	61	13	6	6	45	19	3	6

Différents modes d'argumentation.

Mode 1.

L'élève fait correctement le raisonnement pour quelques cas, le refait ensuite pour n, montrant par là que son traitement des cas particuliers se généralise.

Mode 2.

L'élève ne ressent pas la nécessité de faire correctement le raisonnement pour quelques cas. Après un bref comptage pour les premières valeurs de n, il le fait directement pour n quelconque.

Mode 3.

L'élève fait correctement le raisonnement pour quelques cas et donne la formule conjecturée pour n. Parfois, il la vérifie et conclut à sa véracité.

Répartition des modes d'argumentation pour 100 élèves.

Mode d'argumentation	1	2	3
Nombre	29	13	48

CONCLUSION

C'est bien car ça permet de voir comment on cherche et de pouvoir modifier cette façon et que notre recherche soit plus efficace.

Pierre, 4ième

Il nous est difficile d'écrire une véritable conclusion à cette brochure, car nous considérerions alors nos travaux de recherche clos. Il n'en est rien, et nous sommes loin d'avoir épuisé tous les domaines d'investigation qu'offrent les narrations de recherche. Actuellement nous expérimentons les narrations de recherche dans des établissements en Zone d'Éducation Prioritaire et lors de "travaux collaboratifs" via Internet.

Nous avons des raisons de penser que les narrations de recherche ont une influence réelle sur l'apprentissage et l'acquisition des connaissances et sur l'attitude des élèves face à de nouvelles tâches mathématiques. L'élève se trouve plongé dans une véritable activité mathématique qui éveille sa curiosité. En découvrant le plaisir de chercher, un nouveau rapport au savoir s'instaure qui va engendrer un autre regard sur les mathématiques et c'est aussi un autre regard sur lui-même qu'il portera en temps que mathématicien.

La relation entre l'élève et l'enseignant se modifie, l'élève est reconnu dans sa singularité et un climat de confiance se crée qui favorise des déblocages. La sincérité présente dans les narrations de recherche se répercute souvent dans les autres activités pédagogiques. L'élève se dévoile, montre sa personnalité. De la même manière, le regard de l'enseignant, son jugement sur les élèves, vont prendre en compte ces nouveaux facteurs, et l'on peut s'interroger sur l'évolution à long terme de ces changements de postures dans la relation enseignant - enseignés.

Nous pourrions poursuivre encore longtemps de tels propos pour convaincre le lecteur mais, en résumé, nous pouvons dire que la pratique des narrations de recherche dans une classe modifie profondément les comportements, les relations des enseignants et des élèves.

Nous pensons avoir montré de façon convaincante à travers l'exposé de nos hypothèses et choix pédagogiques, la présentation de nos expérimentations et leurs prolongements dans la conduite d'une classe, toute la richesse de ces travaux d'élèves. De nombreuses pistes de réflexion sont encore à étudier et à découvrir. Nous espérons que la lecture de cette brochure aura donné envie aux lecteurs de faire pratiquer des narrations de recherche dans leurs classes et nous leur souhaitons beaucoup de plaisirs dans la découverte de ces nouveaux écrits.

BIBLIOGRAPHIE

A.P.M.E.P. ; 1984 ; *Pour une mathématique vivante en seconde.* A.P.M.E.P. Publication N°27.

ARSAC G., GERMAIN G, MANTE M. ; 1988 ; *Problème ouvert et situation problème.* IREM de Lyon.

AUDIBERT G. ; 1984 ; *Démarches de pensées et concepts utilisés par les élèves de l'enseignement secondaire en géométrie euclidienne plane.* Nouvelle édition APMEP N°56.

AUDIBERT G. ; 1985 ; *Une problématique en géométrie de l'espace.* Édition IREM Montpellier.

AUDIBERT G. ; 1990 ; *La perspective cavalière.* Publication de l'APMEP N°75.

BALACHEFF N. ; 1987 ; *Processus de preuve et situations de validations.* Educational Studies N°18, vol 2.

BASCOU N. , BONAFÉ F. , BUCHETON D. , COMBES M.C. , DEVILLE A. , DRAY L. , ROBERT J.P. , SAUTER M. ; 2000 ; *Maîtrise des langages en mathématiques* ; GER 99 JCA 147 D. ; Rapport de recherche 98/2000. Édition IREM Montpellier.

BONAFÉ F. , BRUNET R. , PELOUZET B. ; 1992 ; *Les narrations de recherche, instrument méthodologique d'observation.* Actes du colloque Inter - IREM de Géométrie. Édition IREM de Limoges.

BONAFÉ F. , SAUTER M. ; 1998 ; *Enseigner la géométrie dans l'espace.* Repères IREM N°33.

BRONNER A. , PELLEQUER S. ; 2000 ; *Fonctions de l'crit dans la classe de mathmatiques* . dition IREM de Montpellier.

BUCHETON D. ; 1998 ; *Argumenter : construire un point de vue pour construire des savoirs.* Actes du colloque inter - IREM d'Orléans.

BUCHETON D., CHABANNE J-C. ; 1998 ; *Le point de vue, le doute et le savoir.* Le F.A. N°122 : argumenter : enjeux et pratiques.

CHARNAY R. , DOUADY R. , MANTE M. ; 1987 ; *Suivi scientifique, nouveaux programmes de sixième 1985-1986.* Bulletin Inter-Irem Premier cycle.

CIEAEM ; 1989 ; Commission Internationale pour l'Étude et l'Amélioration de l'Enseignement des Mathématiques. Actes CTEF B 7080. FRAMERIES.

CRITON M., GUILLEMOT A., GUTMACHER F. ; 1993 ; *Quatre, trois, deux, un,...., zéro !*. Tangente ; Septembre – Octobre 1993

DELEDICQ A. , MISSENARD C. ; 1996 ; *Encyclopédie Kangourou des Mathématiques au Collège*. Éditions ACL. Malices du .Kangourou.

DUVAL R. ; 2000 ; *"Écriture, raisonnement et découverte de la démonstration en mathématiques"*. R.D.M., Volume 20/2.

quipe ZEP de l'IREM de Paris 7 ; 2002 ; *Expriences de narration de recherche en mathmatiques* . Codition ACL et IREM Paris 7. Brochure APMEP n659.

FRIEDELMEYER. J. ; 1991 ; *L'indispensable histoire des mathématiques*. Repères IREM N°5.

Journées d'Études Scientifiques. 1 et 2 Avril 1999. PERPIGNAN. "Parler et écrire pour penser, apprendre et se construire". Actes IUFM PERPIGNAN.

HOUDEBINE Jean ; 1990 ; *Démontrer ou ne pas démontrer, voilà la question*. Repères IREM N°1.

IREM de Strasbourg ; 1998 ; *Voir et raisonner : la conqute de l'espace au collge* . Repres IREM N 33.

LAKATOS I. ; 1984 ; *Preuves et rfutations. Essai sur la Logique de la dcouverte mathmatique*. Traduction de l'dition anglaise de 1976, et annotations, de N. Balacheff et J.M. Laborde. ditions Hermann, Paris 1984.

LEGRAND M. ; 1993 ; *Débat scientifique en cours de mathématiques*. Repères IREM N° 10.

LUBCZANSKI J. ; 1991 ; *Chercher en classe*. Sans Tambour Ni Trompette N°6 Publication IREM de Lyon.

PAÏS L.C. ; 1991 ; *Représentation des corps ronds dans l'enseignement de la géométrie au Collège* ; Thèse de Doctorat. Édition IREM Montpellier.

PLATON ; *Ménon*. Éditions 1967 Garnier Flammarion.

TROUCHE L. & al ; 1998 ; *Exprimenter et prouver, faire des mathmatiques avec des calculatrices symboliques, 38 variations sur un thme impos* . dition IREM de Montpellier.

VERGNAUD G. ; 1983 ; Recherche en didactique des mathématiques, Volume 4-1.

VERMERSH P. ; 1994 ; *L'entretien d'explicitation*. Collection Pédagogies ; ESF éditeur.

Je trouve les narrations de recherche interressante, pour chercher à comprendre le process, pour ne pas forcément chercher la réponse.

Je trouve que c'est super les Narration de recherche, car moi sa m'aide beau, j'ai eu des note bien par rapport au contrôle.
Je n'en ai jamais fait, et je trouve que c'est super

Je trouve que les narration de recherche sont bien parce qu'ont n'a tout le tempos pour reflechir, et aussi parce qu'ont doit racanter tout ce qu'ont fait et ca, sa me plaît beaucoup.

c'est génial en + ca nous apprend des chose que ~~sont~~ pas n'ont toujours rapport avec la leçon et en + ca remonte la moyenne

Je pense que les narrations de recherche sont des bons moyen pour faire evoluer notre cerveaux

Je trouve que les narrations de recherche sont bien car ça nous permet de voir nos erreurs plus facilement que dans nos contrôles et aussi de corriger notre manière de travailler chez nous.

La narration de recherche, moi j'aime bien car tu peux avoir des note au dessus de la moyenne rien quand disant se que tu fais, tu es même pas noter pour le résultat, mais juste pour par quoi tu es passé.

J'apprecie les narrations de recherche car c'est une façon de faire des math dont j'avais jamais pensé cela permet aussi d'avoir des bonne notes pour remonter la moyenne

C'est bien car ça permet de voir comment on cherche et de pouvoir modifié cette façon et que notre recherche soit plus efficace.

C'est très cool d'expliquer ses idées en rien.

Les publications rcentes des animateurs de l'IREM de Montpellier

Commandes par courriel : irem@math.univ-montp2.fr, ou par courrier, IREM, Universit Montpellier II, cc 040, Place Eugne Bataillon, 34095 Montpellier Cedex 05.

A vos stats - Michel Roche, Luc Trouche et Claudine Vergne, 2002

Un cdrom qui prsente les ralisations des laurats au concours de reprsentations graphiques organis dans l'acadmie de Montpellier en 2002, ainsi que les commentaires du jury.
Édition IREM de Montpellier, 10 Euros

Du fini l'infini - Pierre Meunier, 2002

Un recueil d'exercices et de mthodes, pour la prparation l'agrgation interne de mathmatiques
Éditions IREM de Montpellier, 15 Euros

Des statistiques la pense statistique - Collectif, 2002

Des points d'appui pour approfondir la rflexion sur l'enseignement de la statistique et des probabilits. Des contributions du rseau des IREM (Jean-Claude Duperret, Michel Henry, Marie-Franoise Jozeau) et de l'ensemble des quipes de l'IREM de Montpellier, qui illustrent les nouveaux programmes partir de leur propre domaine de recherche.
Éditions IREM de Montpellier, 15 Euros

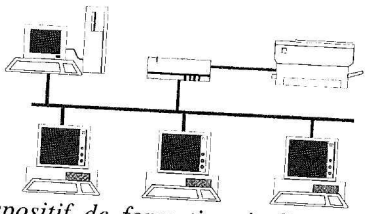
Fonctions de l'crit dans la classe de mathmatique
Alain Bronner et Sylvie Pellequer, 2001

Une tude didactique sur la place et le rle des diffrents types d'crits dans l'enseignement et l'apprentissage des mathmatiques en classe de troisime, sur deux thmes mathmatiques : la racine carre et la gomtrie, en lien avec l'apprentissage de la dmonstration.
Editions IREM de Montpellier, 6 Euros

LOUIS-JEAN, 05003 GAP cedex – Dépôt légal : 111 – février 2003

Suivi de formation à distance pour les enseignants de mathématiques, bilan de la phase expérimentale (2000-2002)

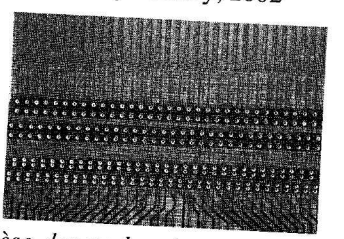
Dominique Guin, Michelle Joab et Luc Trouche, 2003



Le SFODEM est un dispositif de formation à distance, piloté par l'IREM de Montpellier, en partenariat avec l'Université Montpellier II, le CRDP et le Rectorat de Montpellier. Ce cédérom présente quelques résultats de la phase expérimentale de ce dispositif, en matière de travail collaboratif et de conception de ressources.
Éditions IREM et CRDP de Montpellier, 15 Euros

Calculatrices symboliques. Faire d'un outil un instrument du travail mathématique : un problème didactique

Ouvrage coordonné par Dominique Guin et Luc Trouche, avec les contributions de Michèle Artigue, Paul Drijvers, Philippe Elbaz-Vincent, Jean-Baptiste Lagrange, Margaret Kendal, Robyn Pierce et Kaye Stacey, 2002



Cet ouvrage est une synthèse des recherches menées au niveau international sur l'intégration des calculatrices graphiques et symboliques. Les auteurs développent un cadre théorique pour penser les expériences d'intégration de ces outils dans l'enseignement des mathématiques. Ils mettent en évidence les réussites et les limites de ces expériences, en identifiant les processus qui ont produit ces réussites et les conditions qui pourraient permettre de les reproduire plus largement, ils montrent comment certaines limites pourraient être dépassées à condition d'être attentifs à des phénomènes que le système éducatif a tendance à occulter ou dont il a tendance à sous-estimer l'influence.
Éditions La Pensée Sauvage, 36,50 Euros.

Quelles géométries au Collège ?

Ouvrage coordonné par la commission Inter-IREM Premier cycle, 2003

Il s'agit des Actes du colloque Inter-IREM premier cycle, organisé à la Grande-Motte, près de Montpellier. Il contiennent en particulier les textes des quatre conférences du colloque, celle de Daniel Perrin (Des outils pour la géométrie à l'age du collège), celle d'Anne Strauss (Médecines et idées géométriques), celle de Daniel Lehman (Des rudiments de dessin en perspective) et celle de Colette Laborde (Quel rôle pour la géométrie dynamique au collège!?), ainsi que les compte rendus de 24 ateliers. Éditions IREM de Montpellier, 15 Euros

TITRE	***LES NARRATIONS DE RECHERCHE*** ***de l'école primaire au lycée***
AUTEURS	Freddy BONAFÉ, Arlette CHEVALIER, Marie-Claire COMBES, Alain DEVILLE, Liliane DRAY, Jean-Pierre ROBERT, Mireille SAUTER
COORDONNATEUR	Freddy BONAFÉ
DATE	Décembre 2002
CO-ÉDITEURS	IREM de Montpellier et APMEP Brochure APMEP n° 151
MOTS CLÉS	Narration de recherche – Nouveau contrat – Motivation — Espace de liberté – Écrire et penser – Écrits intermédiaires – Écrits réflexifs – Démonstration
RÉSUMÉ	Ce document propose une réflexion sur la pratique des narrations de recherche. Cette activité est mise en œuvre dans de nombreuses classes, depuis l'école primaire au lycée. Une première partie rappelle l'historique des narrations de recherche et les raisons de les pratiquer en classe. Les chapitres suivants présentent ce dispositif pédagogique et proposent des exemples dans les divers niveaux d'enseignement. Sont également abordées des réflexions plus générales concernant : les activités comparables, les incidences de ces travaux sur les pratiques et les prolongements éventuels.
NOMBRE DE PAGES	168
ISBN	2-912846-27-7
IREM de Montpellier	Université des Sciences et Techniques Place Eugène Bataillon CC 040 34095 Montpellier Cedex Tél. 04 67 14 33 83/84 • fax : 04 67 14 39 03
APMEP	26 rue Duméril - 75013 Paris Tél. 01 43 31 34 05 • fax : 01 42 17 08 77 • Mel : apmep@apmep.asso.fr • http://www.apmep.asso.fr