AIRE ET PERIMETRE

Le tour de l'aire en collège

Georges COMBIER
Martine PHILIPPON

INSTITUT DE RECHERCHE SUR
L'ENSEIGNEMENT DES MATHÉMATIQUES

ACADÉMIE DE LYON

Université Claude Bernard Lyon I - 43 Bd du 11 Novembre 1918
69622 VILLEURBANNE Cedex

Septembre 94 - 40 F

AIRE ET PERIMETRE

PRESENTATION

Le travail dont rend compte cet article a son origine dans les stages de formation qui faisaient suite aux évaluations conduites à l'entrée en 6ème. Les résultats à ces évaluations et les analyses faites par les enseignants des erreurs de leurs élèves ont mis en évidence que le concept d'aire, en cours d'élaboration à ce stade de la scolarité, ne se construit pas indépendamment de celui de longueur et périmètre. Notre objectif de travail a été de mettre à la disposition des enseignants qui le souhaitent, outre des propositions de situations en réponse aux difficultés repérées, des éléments de réflexion sur l'enseignement des notions d'aire et de périmètre :

- Quelle place est faite à l'enseignement de ces notions à l'école élémentaire et au collège ?
- Quels sont les problèmes d'enseignement ?
- Quelles sont les connaissances et compétences à développer au collège ?

Nous avons largement emprunté aux travaux de Régine Douady et Marie-Jeanne Perrin, qui ont fait l'objet de plusieurs articles dans la revue "Petit x" :

- L'aire et la mesure ; n° 24 (1989 / 90)
- Aires des surfaces planes ; n° 6 (1984) et n° 8 (1985)

Certaines des propositions que nous faisons sont inspirées des séquences d'apprentissages présentées dans ces derniers numéros.

Nous avons orienté le choix des situations dans deux directions :

- La présentation détaillée de deux situations en classe de 6ème qui visent la construction du concept d'aire et de sa mesure, et leur place dans la progression que nous avons suivie sur ce thème.
- Des propositions de situations pour les autres niveaux de classes du collège, qui sont l'occasion de réinvestir et d'enrichir à propos d'autres thèmes les notions d'aire et de périmètre.

I - HISTORIQUE DE L'APPRENTISSAGE

Lorsqu'un élève arrive au collège, son expérience personnelle et l'enseignement reçu à l'Ecole Elémentaire, l'ont déjà confronté aux notions de longueurs et d'aire.

L'analyse des textes officiels de l'école Elémentaire permet d'avoir une idée assez claire du moment où ces notions apparaissent dans la scolarité et de l'étude qui en est faite ultérieurement. Cependant, il est certain que tout doit être modulé par les choix que font les manuels scolaires utilisés en classe et par les choix personnels des enseignants.
Dans les tableaux qui suivent, nous n'avons retenu que les parties des programmes ou interviennent les notions de longueur et d'aire.

A) ECOLE ELEMENTAIRE :

	PROGRAMME	LONGUEUR	AIRE
fin de **CP**	Préparation de la mesure. Classement et rangement d'objets suivant leur longueur.	- commencer à comparer des longueurs. - commencer à utiliser une mesure - référence. *Rmq :* Ce cycle devrait correspondre à des activités expérimentales donnant lieu à des manipulations.	
fin de **CE**	Classement et rangement d'objets suivant leur longueur. Connaissance du système légal de longueur.	- être capable de se servir d'une règle graduée. - connaître les unités du système métrique. *Rmg :* la seule nouveauté est l'introduction du système métrique.	

fin de **CM**	Formation des concepts de longueur, d'aire (et de volume). Expression d'un résultat du mesurage par un nombre ou un encadrement. Utilisation des unités du système légal. Calcul sur des nombres exprimant des mesures de longueur. Utilisation des mesures de longueur. Détermination du périmètre d'un cercle, aire d'un disque, d'un rectangle, triangle. Utilisation d'un formulaire pour calculer l'aire.	- effectuer des calculs simples avec des mesures de longueur. - Utiliser les instruments de mesure, connaître les unités usuelles, donner un ordre de grandeur. - Savoir calculer le périmètre d'un carré d'un rectangle, d'un disque.	- maîtriser les notions d'aire (et de volume). - Connaître les unités courantes (m^2-dm^2). - savoir calculer l'aire d'un carré, d'un rectangle, d'un disque. - utiliser un formulaire.

<u>Quelques remarques:</u>

1 - On est frappé par la grande attention qui est portée à la construction du concept de longueur ; depuis le CP jusqu'à la fin du CM, cette notion est omniprésente.

Par contre, le concept d'aire n'apparaît brutalement qu'au CM, sans préparation ni manipulation dans les classes précédentes.

Les manipulations sur la notion d'aire étant plus délicates encore que celles sur les longueurs, il semblerait que le temps que peut dégager l'enseignant à ce sujet parait bien modeste par rapport aux objectifs fixés ("maitriser la notion d'aire"). Finalement, au CM, en ce qui concerne l'aire, tout se télescope : le concept, les mesures, les unités, les formules.

N'est-ce pas la raison pour laquelle le travail sur la notion d'aire peut aboutir très rapidement à des applications de formules et des exercices de changement d'unités ?

2 - La notion de périmètre n'apparaît, elle aussi, que dans le programme de CM et ce, bien après les travaux sur la notion de longueur, et après l'introduction des unités de longueur.Aucune indication n'est donnée qui inciterait le maître à dégager du temps pour travailler la notion de périmètre indépendamment de la mesure.

Il semblerait donc que l'aspect calculatoire (travail sur les formules) prenne le dessus sur l'aspect géométrique.

B) COLLEGE:

classe	PROGRAMME	LONGUEUR	AIRE
6ème	**A-Travaux géométriques :**		
	Reproduction de figures planes simples.	Compléter et consolider l'usage d'instruments de mesure. <u>Sur papier blanc, sans méthode imposée : reporter une longueur.</u>	
	Comparaison d'aires planes.		Déterminer des aires à l'aide soit de reports, de décomposition, de découpages et de recollements, soit de quadrillages et d'encadrements. Retenir sous forme d'image mentale, le passage du rectangle au triangle rectangle ou au parallélogramme . Mettre en place des calculs sur les aires à partir de l'aire du rectangle. <u>Evaluer, à partir du rectangle, l'aire du triangle rectangle.</u>
	Symétrie orthogonale par rapport à une droite : conservation des longueurs et des aires.		
	B-Travaux numériques.		
	Initiation aux écritures littérales.	Schématisation d'un calcul en utilisant des lettres.	Schématisation d'un calcul en utilisant des lettres.

5ème	**A-Travaux géométriques.** Prismes droits et cylindre de révolution. Transformation de figures par symétrie centrale. **B-Organisation et gestion de données** Exemple de fonctions-proportionnalité.	 Conservation des longueurs.	 Voir dans l'espace et calculer des aires. Conservation des aires Relier l'aire du parallélogramme et celle du triangle. Evaluer l'aire du parallélogramme et du triangle à partir de celle du rectangle. Variation de l'aire d'un triangle ou d'un parallélogramme quand la mesure d'un côté est fixée ; variation de l'aire du disque en fonction du rayon. Ecritures littérales et utilisation des formules d'aires.

4ème	**Travaux géométriques.** Distance d'un point à une droite Sphère.		 Utilisation pour le calcul d'aires planes. Calcul de l'aire de la sphère et de l'aire des faces des solides vus en 6ème et en 5 ème.
3ème	**Travaux géométriques** Pyramide et cône ; section par un plan parallèle à la base. Effet d'un agrandissement ou d'une réduction	 Calcul de longueurs ; utilisation du théorème de Thalès Multiplication des longueurs données par un même coefficient (k)	 Calcul des aires latérales et des aires des sections Multiplication des aires par le carré du coefficient (k^2)

Remarques :

Une lecture rapide des programmes de l'école Elémentaire, peut laisser croire qu'en fin de premier cycle, un élève maîtrise la notion d'aire et conduire l'enseignant de collège à négliger cette partie du programme en renforçant l'aspect calculatoire au détriment du sens. Or, nous constatons que les programmes du collège sont centrés trés précisément sur la construction du concept d'aire. L'accent y est mis sur l'aspect géométrique ; on y vise l'installation de quelques images mentales en nombre restreint qui seront ensuite mobilisées pour établir des formules et pour la résolution de problèmes.

II - LES PROBLEMES D'ENSEIGNEMENT

1. Les difficultés de manipulation

A l'école élémentaire, la notion de grandeur prend naissance à partir d'activités de rangement, de classement d'objets physiques. Ainsi pour la longueur on utilise de la ficelle, le compas ;

on effectue des comparaisons par superposition...

Pour l'aire les manipulations deviennent plus complexes ; il est nécessaire de découper et recoller des surfaces. Ces expérimentations sont fastidieuses, imprécises et dévoreuses de temps ; ce qui explique la mise en place précoce de procédures opératoires qui entraîne une perte de sens.

C'est pourtant par le biais de manipulations qu'on peut d'une part donner du sens à la notion d'aire, et à travers les difficultés à pratiquer celles-ci qu'on éprouvera d'autre part la nécessité de s'en libérer, pour chercher à élaborer des formules.

2. Les difficultés liées aux concepts

Les élèves ont une perception de la figure qui englobe différentes caractéristiques : sa forme, son encombrement, son contour, son intérieur. Si il est facile de rattacher la notion de périmètre à la longueur du contour, l'aire ne se distingue pas clairement de l'objet qu'est la surface.

Périmètre et aire sont deux notions différentes attachées à un même objet, ce qui incite à considérer que ces deux grandeurs varient de la même manière : à périmètres égaux, aires égales ; classement identique des figures suivant l'aire et le périmètre...

3. Les difficultés liées à l'unité légale

L'unité d'aire (le centimètre-carré par exemple) est définie en référence à un carré. On retrouve la surface avec sa forme... et la longueur. Cette définition constitue incontestablement un obstacle.

La mesure de l'aire d'une surface est liée à la possibilité de pouvoir paver cette surface avec une forme donnée, en l'occurrence un carré. Ainsi il est difficile de concevoir qu'on puisse exprimer l'aire d'un triangle en cm^2 alors qu'on ne peut pas le paver avec des carrés unités. Cette impossibilité matérielle doit être contournée, ce qui peut être fait de plusieurs manières:

- en transformant la figure de départ en une figure de même aire, mais effectivement pavable avec l'unité.
- en logeant à l'intérieur de la figure de départ la plus grande figure possible, pavable avec l'unité, puis en découpant la surface restante pour tenter de reconstituer des carrés unités.

Le symbole utilisé pour désigner l'unité d'aire (cm^2) intègre le symbole d'unité de longueur (cm), sans mettre en évidence les rapports existant entre les unités d'aire ($1\ cm^2 = 100\ mm^2$). Il ne favorise pas la distinction entre longueur et aire ; les élèves effectuent des changements d'unités de mesure d'aire comme ils effectuent des changements d'unités de mesure de longueur.

L'usage du tableau de conversion, utilisant les règles de déplacement de la virgule (un rang pour les mesures de longueur, deux rangs pour les mesures d'aire) et renforçant cette similitude n'a qu'une portée limitée et ne peut pas se substituer à un travail sur la correspondance entre les unités d'aire, s'appuyant sur le pavage.

4. Le calcul de l'aire

La mesure à l'aide d'un instrument, des côtés d'un polygone permet d'en déterminer le périmètre. Par contre on n'accède pas directement à la mesure de l'aire ; il n'existe pas d'instrument qui permette de mesurer l'aire d'une figure. La mesure de l'aire s'obtient en effectuant un calcul, après avoir mesuré des longueurs (pas obligatoirement les côtés) ; ce qui renforce encore la confusion entre aire et périmètre : les mesures sont effectuées en centimètre donc l'aire s'exprime en centimètre.

III - LES CONNAISSANCES ET COMPÉTENCES QU'IL NOUS PARAÎT SOUHAITABLE DE DÉVELOPPER AU COLLÈGE

Notre but est de construire, en les différenciant l'un de l'autre, les concepts d'aire et de périmètre.

1. Le périmètre

Associer au périmètre l'image mentale du contour de la figure. La connaissance du périmètre d'un polygone se résume à la connaissance de la longueur de ses côtés.

2. Aire et périmètre

La seule connaissance des côtés d'un polygone ne nous renseigne pas sur son aire. Il est nécessaire de prendre en compte sa forme pour mentalement :

- soit transformer le polygone en une figure de base (rectangle, triangle…)
- soit le décomposer en figures élémentaires.

et de mesurer d'autres dimensions que les côtés.

Savoir que les relations existant entre les périmètres de deux figures et celles existant entre leurs aires, ne sont pas les mêmes.

Savoir que dans le cas d'une figure faite de deux figures accolées, il y a additivité des aires mais pas des périmètres.

3. L'aire

Savoir que l'aire d'un rectangle s'obtient en multipliant la longueur par la largeur. Cette formule doit être associée à l'image mentale de la multiplication qui permet de dénombrer les carrés unités nécessaires pour paver le rectangle.

Savoir décomposer un polygone pour reconstituer la formule donnant son aire, en se ramenant à l'aire du rectangle, du triangle rectangle…

Mémoriser la formule donnant l'aire du disque.

Dissocier l'aire d'une figure de sa forme. Ceci vaut en particulier pour l'unité d'aire où il est possible de construire une grande variété de figures ayant pour aire l'unité.

4. Les mesures d'aire

Installer l'image mentale de la correspondance entre les unités d'aire (pavage du carré unité par des carrés unités, de rang immédiatement inférieur).

Savoir gérer les changements d'unités en prenant appui sur cette image (multiplication ou division par 100 pour des mesures exprimées à l'aide de deux unités consécutives)

IV - UNE PROGRESSION EN CLASSE DE 6ème

1) AIRE ET PERMETRE : remédiation ou apprentissage ?

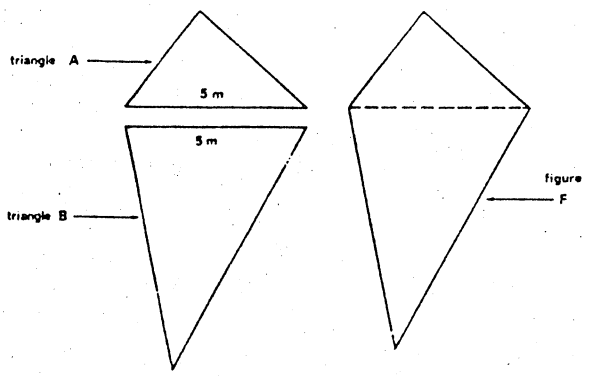
1.1 Pourquoi cette situation ?

A l'entrée en sixième, les notions d'aire et de périmètre sont en cours d'acquisition. En particulier, nous avons constaté que pour de nombreux élèves, ces notions ne sont pas clairement distinguées. Par exemple, dans les évaluations d'entrée en sixième, à l'occasion de deux exercices, nous voyons apparaître les erreurs suivantes :

Exercice 29 (1992)

Le périmètre du triangle A est 12 m..
Le périmètre du triangle B est 17 m.

La figure F est formée à l'aide des deux triangles, comme indiqué sur le dessin. Quel est le périmètre de la figure F?

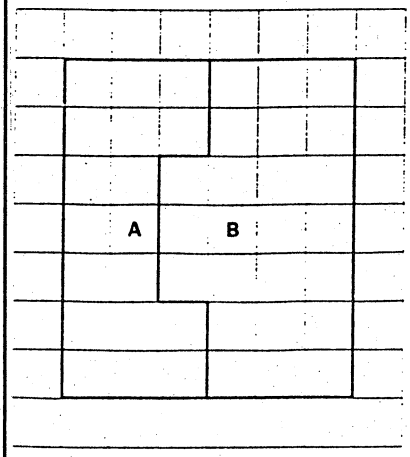


Réponse : Périmètre de la figure F: 12 + 17 = 29m

On peut supposer que cette erreur provient de l'utilisation du "théorème-élève":
"de même qu'il est possible d'additionner les aires de deux figures accolées, il est possible d'additionner les périmètres des deux figures pour obtenir le périmètre de la figure totale."

<u>Exercice 36</u> (1992)

Un terrain a été partagé comme l'indique la figure ci-contre. Entoure dans chaque cas la réponse qui convient :



a. L'aire de la parcelle A est la plus grande | Les deux parcelles ont la même aire | L'aire de la parcelle B est la plus grande

Explique ton choix:

b. Le périmètre de la parcelle A est le plus grand | Les deux parcelles ont le même périmètre | Le périmètre de la parcelle B est le plus grand

Explique ton choix:

<u>Réponse</u> : Le périmètre de B est plus grand que celui de A parce que B a plus de carreaux.

Cette erreur peut-être interprétée comme l'utilisation d'un autre "théorème-élève":
"quand on compare deux figures, celle qui a la plus grande aire est aussi celle qui a le plus grand périmètre."

1.2 <u>Description de l'activité</u> :

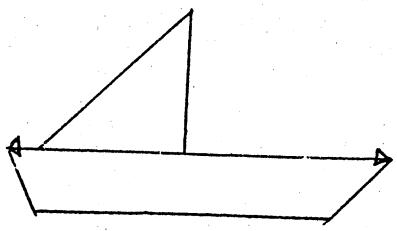
1- <u>Apprentissages visés</u> :

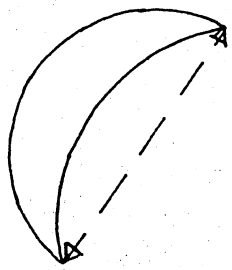
* L'aire se conserve par découpage et recollement.
* Des figures de formes différentes peuvent avoir la même aire.
* L'aire et le périmètre varient indépendamment l'un de l'autre.

D'autre part, il nous est apparu nécessaire de prendre en compte la notion d'encombrement qui ne fait pas l'objet d'un apprentissage mais dont nous faisons l'hypothèse qu'elle vient parasiter chez les élèves les notions d'aire et de périmètre.

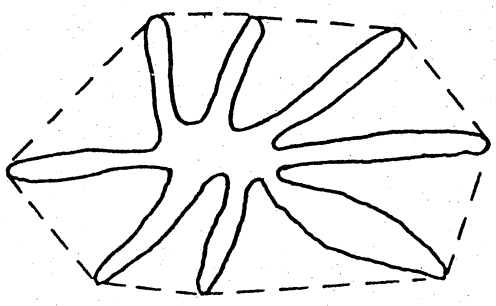
L'encombrement peut être perçu de différentes manières, par exemple :

- comme le plus grand segment ayant ses extrémités sur la figure :





- comme le polygone convexe dans lequel on peut inscrire la figure :



2- <u>Matériel</u> : voir annexe

* 1 tangram et 1 feuille avec les trois figures par élève
* 1 feuille "réponse" par groupe de 3 ou 4 élèves
* 3 feuilles blanches (format 15 x 11) par groupe

Prévoir quelques tangrams et feuilles (avec les trois figures) supplémentaires.

Les figures 1 et 2 ont la même aire ; la figure 3, plus "encombrante" que les deux autres, a une plus petite aire.

La figure 1 a le plus petit périmètre, la figure 3 le plus grand.

La figure 3 peut être obtenue par recollement de différentes manières ; la pièce du tangram inutilisée peut être différente suivant les cas.

3- Nos choix didactiques :

* Faire expliciter les conceptions des élèves sur aire et périmètre. C'est la première activité sur ces thèmes que nous proposons aux élèves (Ces deux notions n'ont pas été étudiées en classe avant cette séquence).

* Eviter le recours systématique aux formules pour trouver l' aire ou le périmètre et travailler sur le sens de ces notions. Les aires sont, par exemple, comparées par découpage et recombinaison des morceaux.

Ainsi, il nous apparaît nécessaire de proposer des situations, qui, en poursuivant l'apprentissage des notions d'aire et de périmètre, favorisent également leur distinction.

Nous nous proposons de décrire dans la suite de cet article, l'une des activités que nous avons utilisée en classe.

Cette activité a été développée à partir d'une proposition d'un groupe de professeurs du Chambon-Feugerolles participant au stage remédiation au cours de l'année scolaire 1989/1990.

4- A qui s'adresse cette activité ?

L'activité est proposée à l'ensemble de la classe, l'analyse des programmes et des manuels de l'Ecole Elémentaire permettant de penser que l'essentiel de l'enseignement consiste à installer un formulaire portant sur les figures classiques.
Les programmes de 6ème donnent des indications pour que le travail de cette classe porte sur le sens ("il s'agit de déterminer les aires à l'aide, soit de reports, de décompositions, de découpages et de recollements, soit de quadrillages et d'encadrements").

Suivant l'interprétation du programme faite par les professeurs de l'Ecole Elémentaire, il peut s'agir pour certains élèves, d'un premier apprentissage et pour d'autre, d'une remédiation.

1.3 Déroulement :

Durée totale : 2 x 55 minutes.

A-Premiére phase:

Durée : 55 minutes. Distribuer les feuilles (1 tangram et 1 feuille avec les 3 figures par élève)

*** 1er temps :**

Consigne : "Découpe les pièces du tangram et utilise ces pièces pour reconstituer le carré (figure 1)".
Les élèves travaillent individuellement sur la figure 1. Si un élève ne parvient pas à refaire la figure 1, il peut consulter le tangram "entier" dont dispose le professeur.
Il s'agit dans cette partie de familiariser l'élève avec un travail du type "puzzle".

*** 2ème temps :**

Consigne :" Utilise les pièces que tu as découpées pour comparer les aires des figures 1, 2 et 3."
Les élèves travaillent tout d'abord individuellement. La contrainte consistant à imposer l'utilisation des pièces a pour but d'éviter le recours aux formules pour calculer les aires.
Ensuite, les élèves travaillent en groupe de 3 ou 4 pour comparer et valider leurs résultats et, éventuellement, pour une entraide, si celle-ci est nécessaire.

*** 3ème temps :**

Quand le groupe estime avoir terminé, le professeur remet une feuille "réponse" par groupe.

Consigne : "Ecrivez vos conclusions et montrez comment vous y êtes arrivés. Vous pouvez coller les pièces du tangram que vous avez utilisées pour pouvoir comparer les aires."
Les groupes seront même invités à coller les pièces non utilisées pour le bateau à côté de celui-ci.

*** Mise en commun :**

Les feuilles "réponse" sont affichées. La mise en commun portera sur la comparaison des aires par pavage permettant de mettre en lumière:

- l'égalité des aires de deux figures de formes différentes (cas du carré et du rectangle).
- l'aire d'une figure est inférieure à l'aire de la figure de référence si toutes les pièces ne sont pas réutilisées (cas du bateau et du tangram).
- le recollement de pièces différentes peut permettre de reconstituer une même figure (cas du bateau).

Si le besoin s'en fait sentir, il est possible de proposer aux élèves un travail en groupe pour comparer les aires des pièces non utilisées pour paver le bateau ; il peut rester un carré, un parallélogramme ou un triangle. Si un groupe démarre un travail basé sur l'utilisation de formules (erronées ou non),on lui demandera de continuer le travail par découpage-recollement, le choix du découpage étant fait par eux.

B-Deuxième phase

Durée : 10 minutes. Les élèves sont en groupe (les mêmes que précédemment) ; ils disposent toujours de la feuille sur laquelle se trouvent les trois figures (des feuilles supplémentaires sont disponibles si des élèves en font la demande).
On distribue une feuille 15x11 par élève ;

Consigne : "Est-il possible de reproduire exactement chacune des figures sur cette feuille ?"
Il n'est pas demandé de les reproduire ; on autorisera le travail par superposition.
Les élèves constatent qu'il est impossible de reproduire la figure 3 sur une feuille de cette dimension.
La mise en commun portera sur la distinction entre l'encombrement et l'aire, la figure la plus encombrante étant, ici, celle qui a la plus petite aire.

C-Troisième phase:

Durée : 20 minutes .Le matériel est le même mais les élèves disposent d'un double-décimètre.

Consigne : "Compare les périmètres des figures 1, 2 et 3"
Dans un premier temps le travail est individuel ; les groupes sont reformés ensuite.
Chaque groupe rédige sa réponse sur une feuille avec les trois figures et fait figurer ses mesures et ses calculs.

Mise en commun :

Les réponses des différents groupes sont répertoriées au tableau :
- la discussion porte d'abord sur les écarts constatés sur le périmètre d'une même figure et renverra à la précision du mesurage (notion de tolérance). Les mesures seront refaites si l'écart est trop important.
- L'essentiel portera sur le rangement des périmètres.

Finalement une mise en commun se fera sur la comparaison des deux classements : suivant l'aire et suivant le périmètre.
Aire et périmètre varient indépendamment l'un de l'autre :
- les deux figures 1 et 2 ont la même aire mais pas le même périmètre.
- la figure 3, qui a la plus petite aire, a le plus grand périmètre.

1.4 Ce qui peut se passer.

A-Première phase :

Au cours du premier temps, certains élèves ont de grandes difficultés pour reconstituer le carré. Il est important de leur laisser le temps et de les laisser choisir leur solution personnelle (soit réaliser le puzzle sur le modèle avant la réalisation sur la figure 1 ; soit retourner plusieurs fois voir le modèle ; soit faire le puzzle sur la figure 1 en ayant le modèle à côté).

Au cours du deuxième temps :

1- Le rectangle, plus que le bateau, présente des difficultés. Chaque groupe arrive cependant à trouver une solution (alors qu'un élève seul peut se décourager).Si un groupe reste cependant en difficulté, on peut lui proposer un démarrage possible.

2- Des élèves demandent s'il est possible d'utiliser les pièces de 2 tangrams. Le professeur affirme alors que c'est possible avec les pièces d'un seul tangram.

Au cours de la mise en commun, il n'y a pas toujours accord dans la classe sur le fait que les pièces restantes ont la même aire. Il parait important de consolider à ce moment le fait que deux pièces de forme différente peuvent avoir la même aire et de prendre le temps de laisser les groupes chercher, même si cette activité déborde alors sur le séance suivante. Si un groupe commence un travail basé sur la mesure et les calculs, cela traduit le fait que la notion d'aire n'est souvent liée qu'au calcul ; d'où l'importance de la contrainte portant sur le découpage-recollement.

Un petit détour historique parait ici nécessaire pour éclairer le comportement des élèves. L'étude des programmes de l'école élémentaire et du collège faite par M.J Perrin (Petit x n°24), montre que ce n'est qu'à partir de 1978 dans l'enseignement primaire que l'aire est introduite en tant que grandeur (indépendante de la forme et quelque unité que ce soit). Avant cette date, il n'était fait mention que de calcul d'aires.

B-Deuxième phase :

Pour trouver une solution "à tout prix", certains élèves proposent d'utiliser un dessin à l'échelle. Il suffit de les ramener à la consigne.

D'autres perçoivent que la surface de papier est suffisante et proposent un agencement permettant de modifier la forme du bateau ou de la feuille (par découpage).

C-Troisième phase :

Il n'y aura pas forcément accord sur le fait que le périmètre du carré et du rectangle sont différents. Ceci peut venir de plusieurs points :

- l'idée est fortement ancrée que, puisque les figures 1 et 2 ont la même aire, elles doivent avoir le même périmètre.
- la notion d'imprécision n'est pas clairement perçue. La différence entre 40,4 cm et 43 cm peut très bien être vue comme étant due au mesurage.

Au cours du débat, il n'y a pas accord sur le périmètre du carré, certains obtenant 40 cm (4 x 10) et d'autres 40,4 cm (4 x 10,1) ; en conclusion de la discussion, la différence entre ces deux valeurs est mise tout à fait justement sur le compte de l'imprécision des mesures. Pour le rectangle, des élèves obtiennent 43 cm ((14,3 + 7,2) x 2). N'ayant de l'incertitude des mesures qu'une notion intuitive, ils

admettent alors que la différence existant entre 40,4 (périmètre du carré) et 43 (périmètre du rectangle) n'est, elle non plus, pas significative ; ceci leur permet de ne pas remettre en cause leur idée première : le carré et le rectangle qui ont la même aire, doivent aussi avoir le même périmètre.

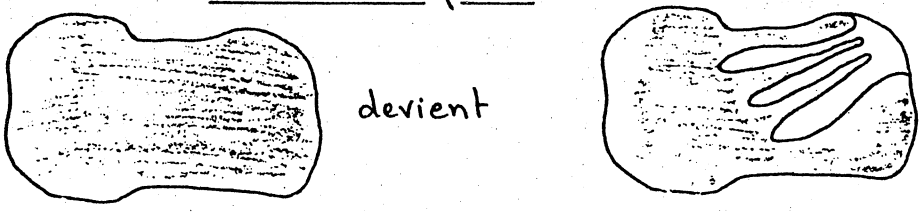
- parmi les élèves qui affirment que les périmètres de 40,4 cm et de 44 cm sont égaux, n'y en a-t-il pas qui sont encore en difficulté sur les nombres décimaux?

1.5 Des prolongements possibles.

Si cette activité ébranle les convictions des élèves, elle ne permet pas, à elle seule, de construire les notions d'aire et de périmètre.
A d'autres moments de l'année, des activités complémentaires permettront de reprendre ces notions. Par exemple, avant toute introduction de formules, on proposera les activités suivantes :

- Après avoir donné une figure aux élèves, le professeur leur demande s'il est possible de la transformer de façon à obtenir une figure d'aire plus petite et de périmètre plus grand que ceux de la figure donnée.

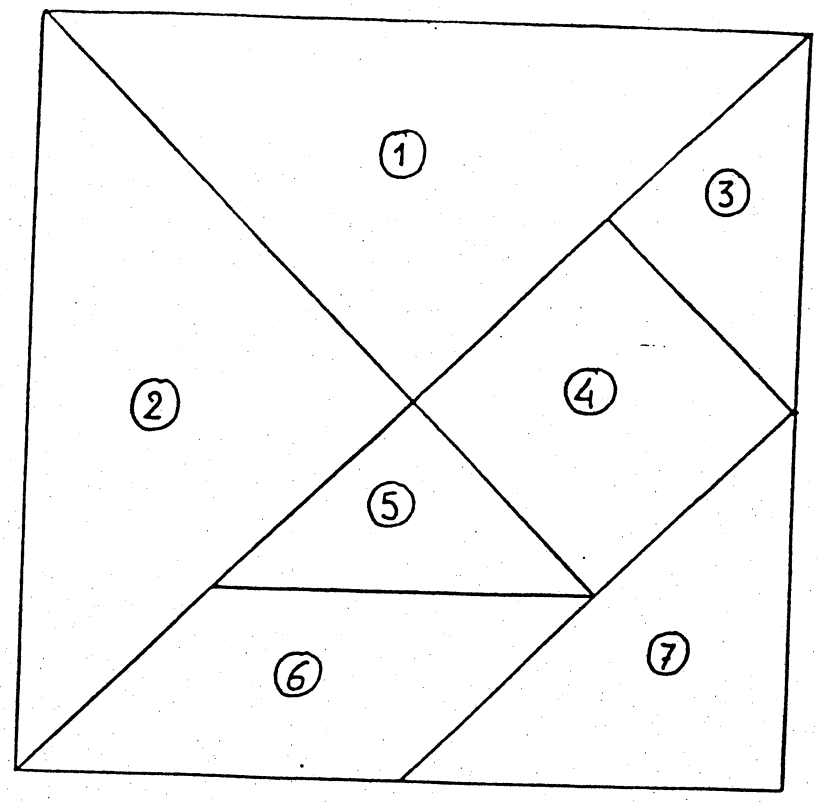
Par exemple:



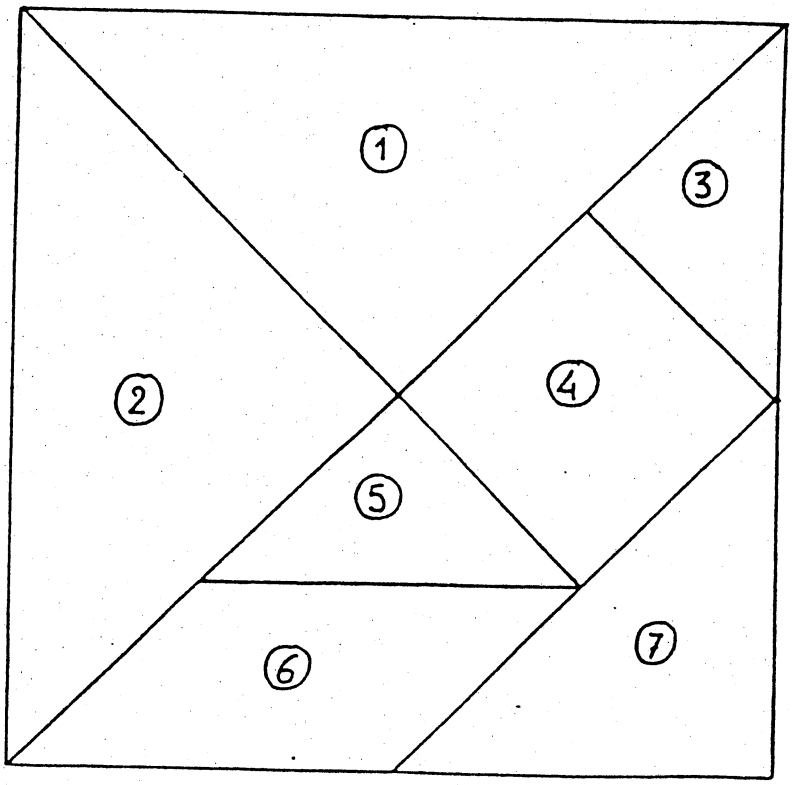
- Après avoir donné une figure, le professeur demande de construire des figures ayant la même aire et de comparer leurs périmètres.
(peut être donné sur papier blanc ou sur réseau)

- De la même manière, il peut demander de construire des figures ayant le même périmètre et de comparer leurs aires.

LE TANGRAM



LE TANGRAM

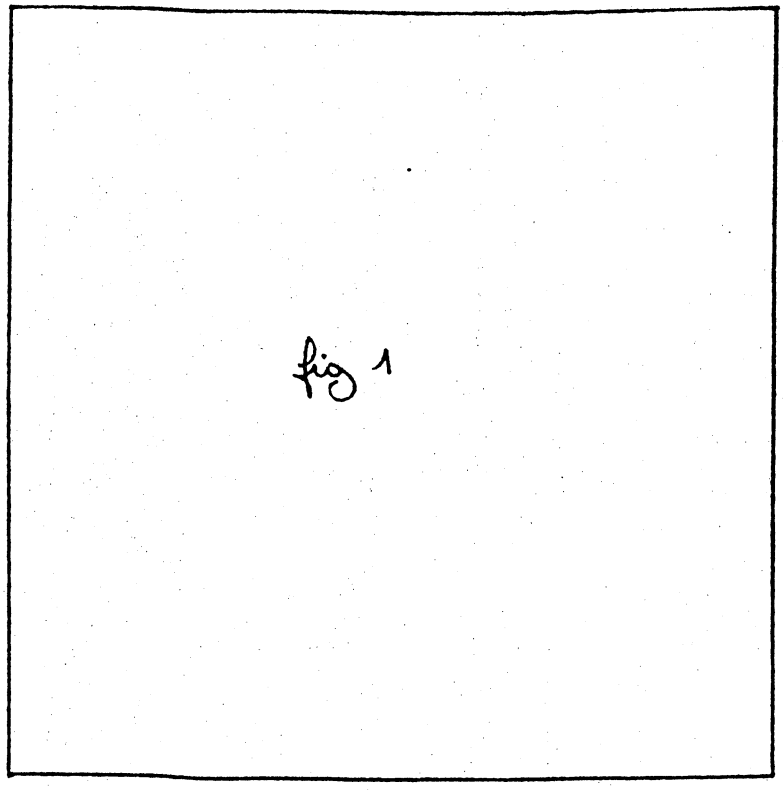


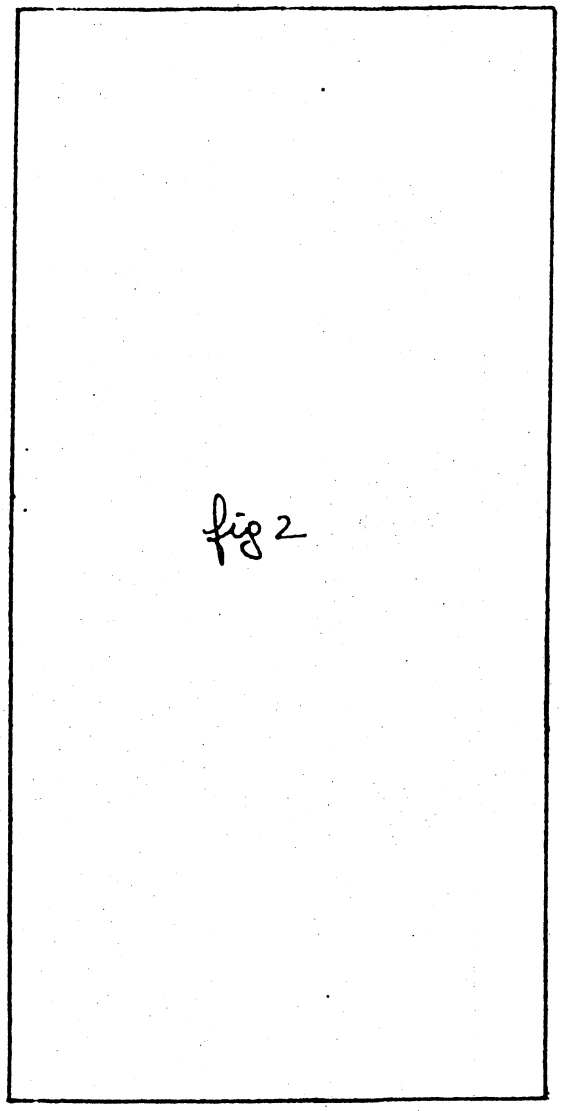
Manche 2

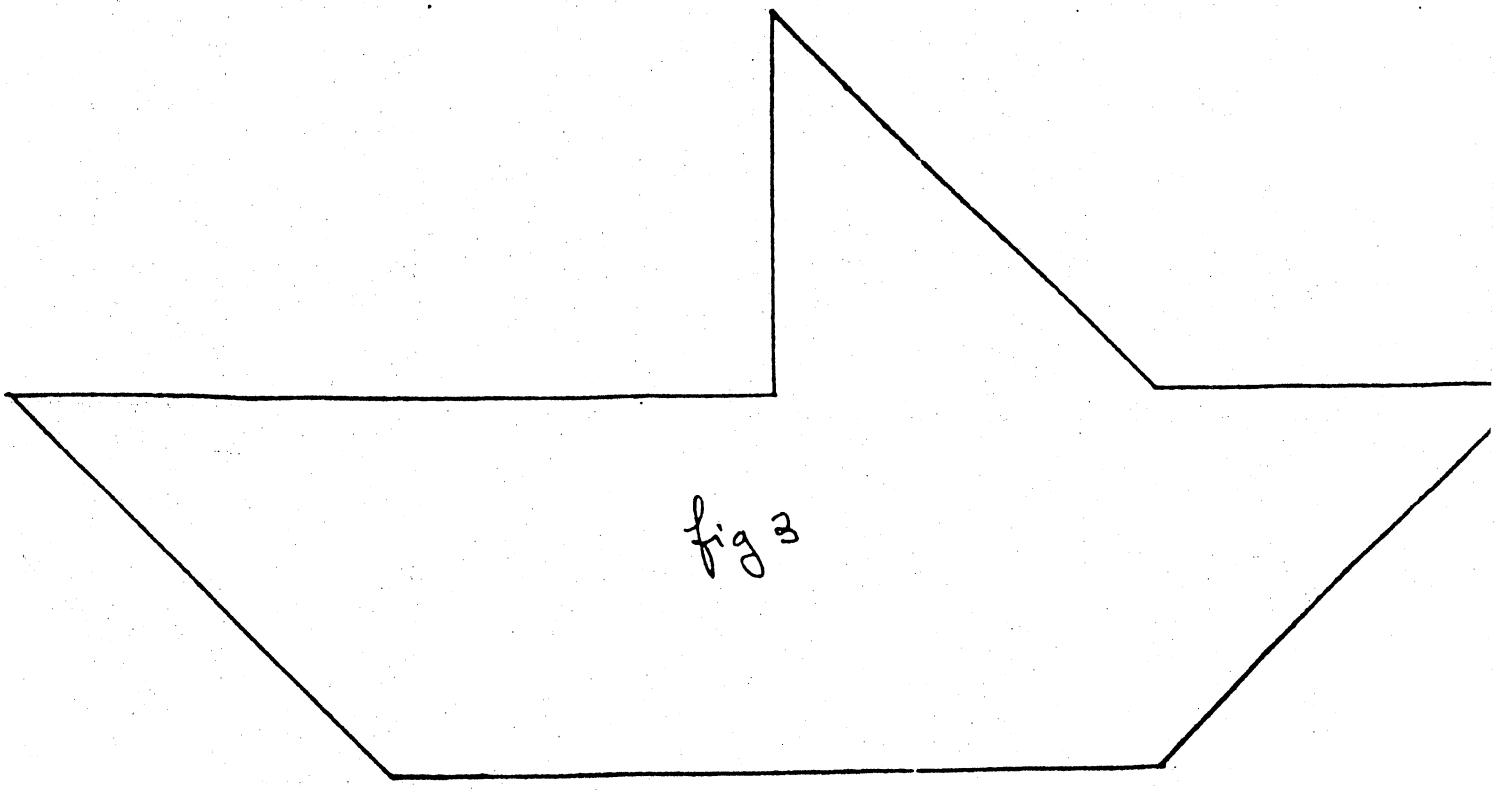
1-Découpe soigneusement les pièces numérotées du Tangram.

2-En utilisant ces pièces,reconstitue la figure 1.

3-En utilisant ces pièces,compare les aires des figures 1 - 2 et 3.

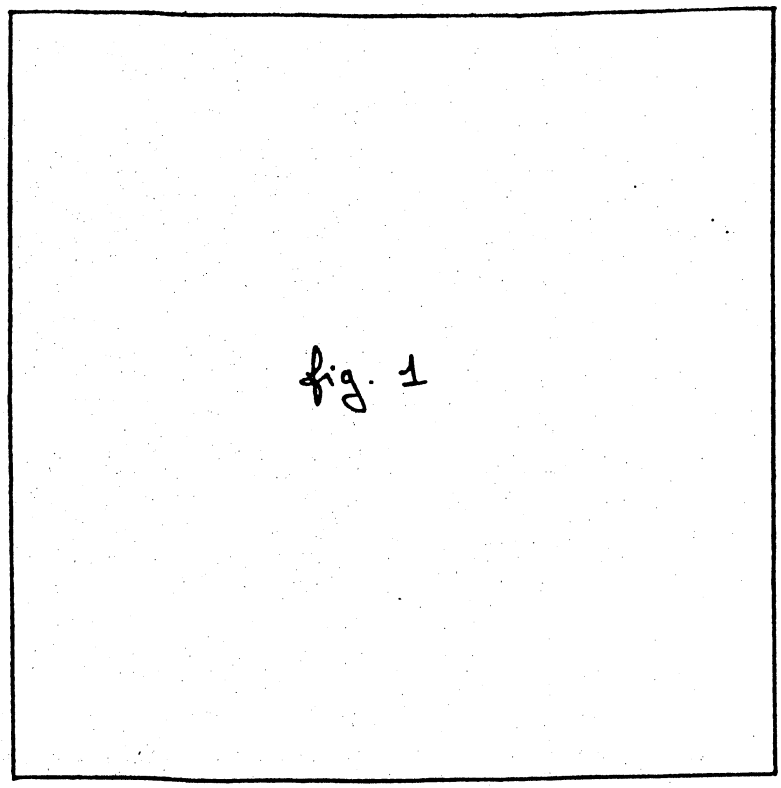


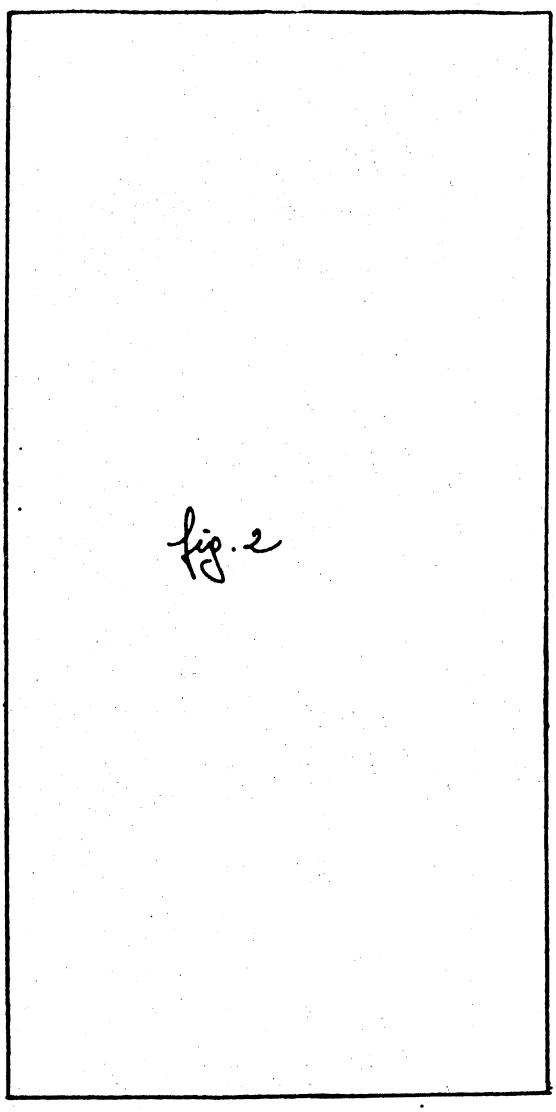


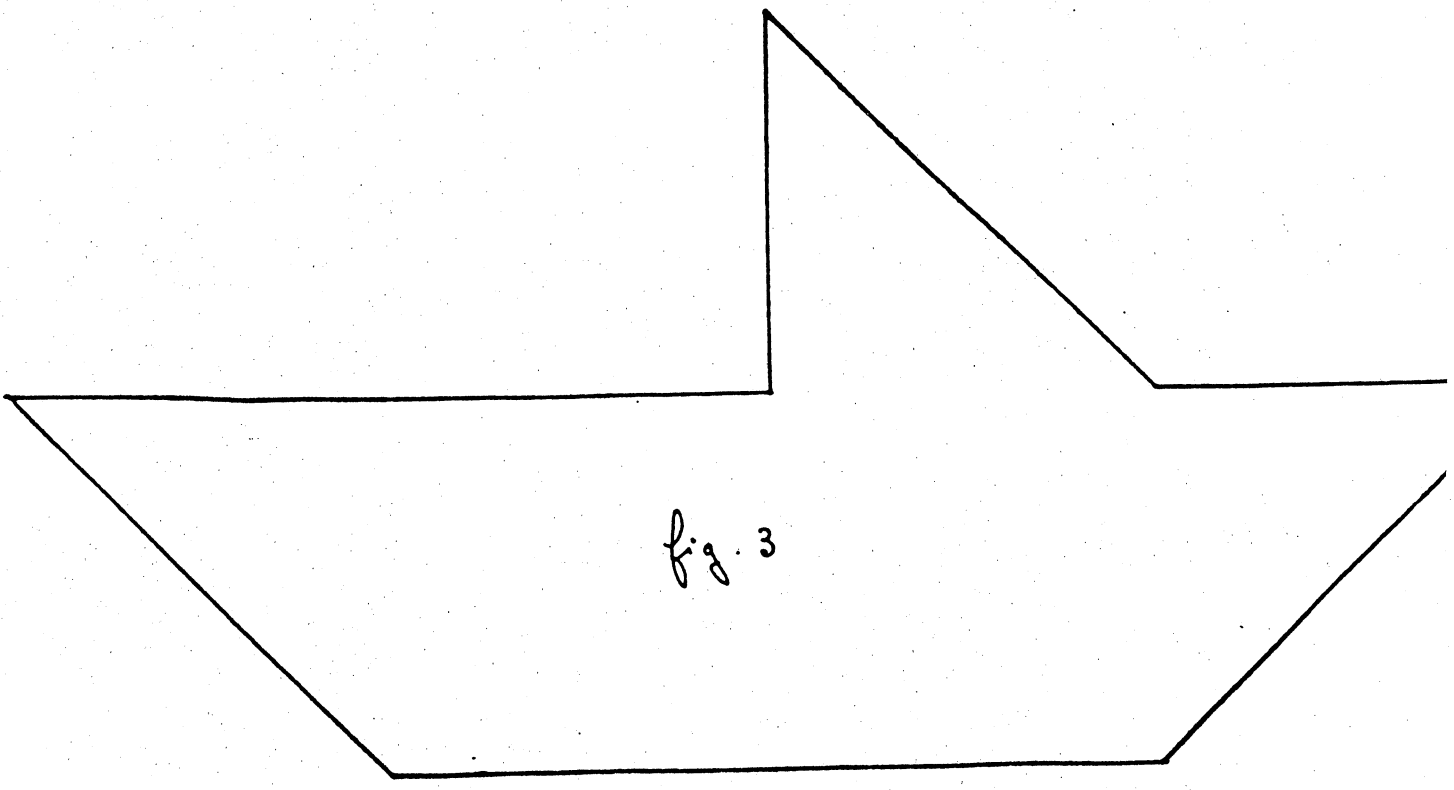


Annexe 3

REPONSE





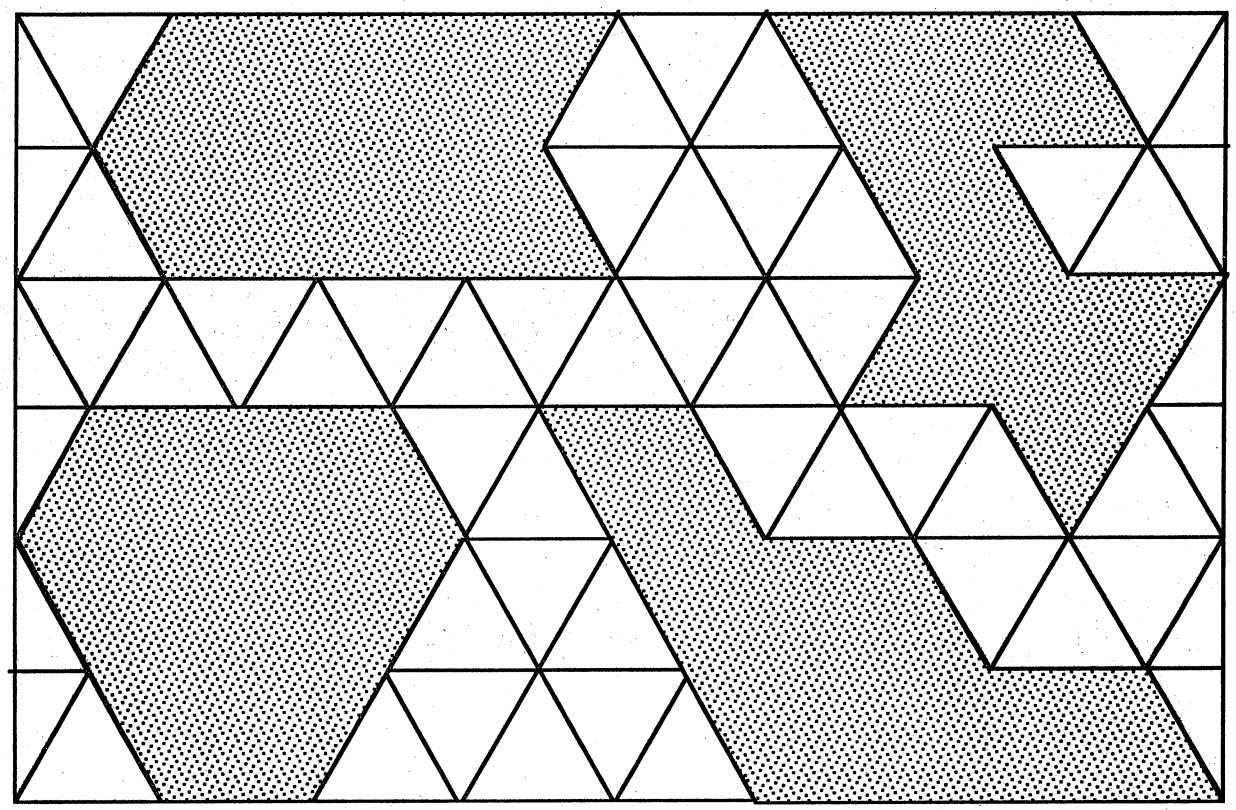


2) ET ENSUITE...

Dans les activités qui suivent nous nous proposons d'installer la notion de mesure d'aire, sans perdre de vue la distinction existant entre aire et périmètre.

2.1- Comparaison d'aires sur réseau à mailles polygonales régulières.

Il est demandé aux élèves de comparer les aires de ces polygones puis leurs périmètres.



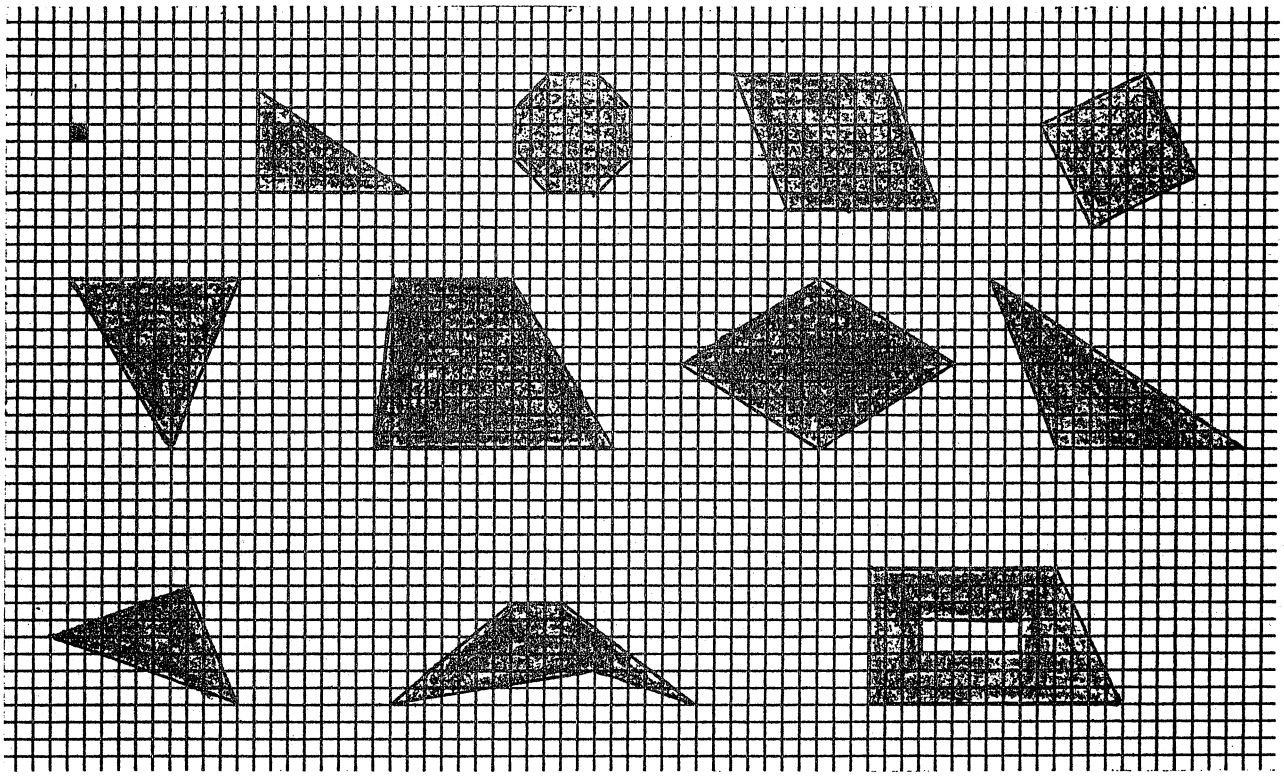
Spontanément les élèves choisissent de compter les mailles contenues à l'intérieur de chaque polygone. Ils attribuent ainsi une mesure à l'aire de chaque figure après avoir choisi implicitement la maille du réseau pour unité d'aire, ce qui permet le classement des aires.

La comparaison des périmètres peut s'effectuer de manière similaire en choisissant pour unité de longueur le côté d'une maille.

Le fait que la comparaison des aires et des périmètres conduise à deux classements différents des figures étonne de nombreux élèves.

2.2- Mesure d'aires sur quadrillage à maille carrée.

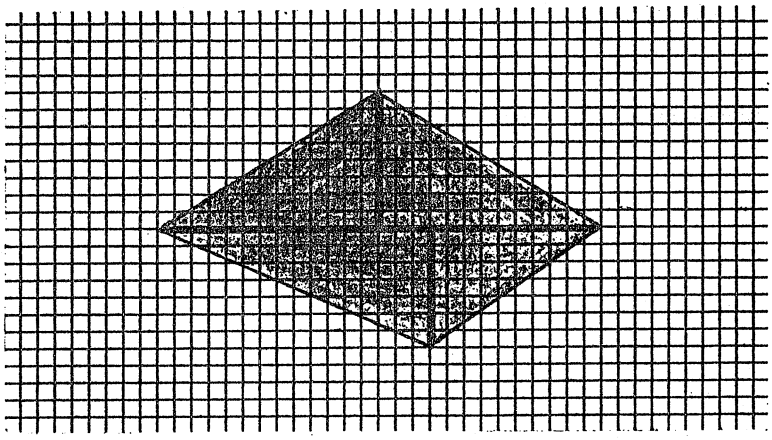
L'unité étant le carreau, il est demandé aux élèves de donner la mesure de l'aire de chacune des figures ci-dessous.



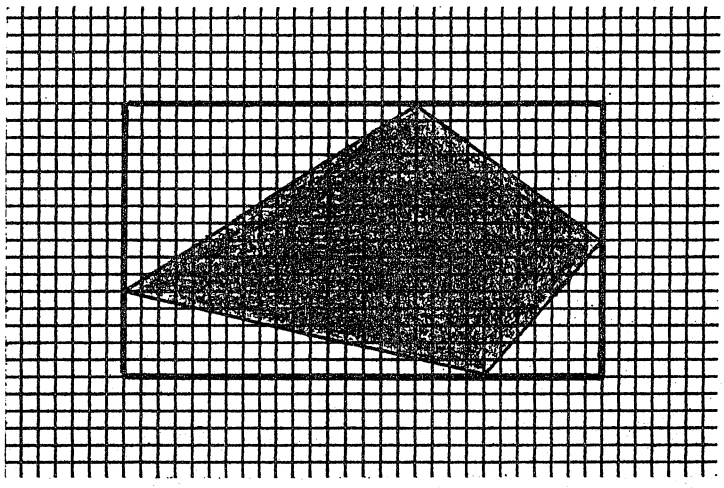
L'activité a pour but :

- de faire percevoir que le comptage des carreaux contenus à l'intérieur de la figure ne suffit pas, que le découpage des carreaux dans le but de paver la figure est souvent source d'erreurs.
- d'installer l'idée qu'il est préférable de recourir à des figures simples dont on peut facilement connaître l'aire (rectangle, triangle rectangle). La figure dont on cherche à évaluer l'aire peut être :

  * soit décomposée en figures simples et son aire obtenue par addition des aires des figures qui la composent.



* soit encadrée dans une figure simple et son aire est alors obtenue par différence des aires.



Cette activité doit déboucher sur l'installation de l'image mentale du triangle rectangle comme "moitié" d'un rectangle.

2.3- Les unités légales d'aire.

Nous faisons le choix de commencer par le centimètre-carré, facilement appréhendable par les élèves à la suite des activités précédentes.

Sur papier millimétré le millimètre-carré est identifié et sa relation avec le centimètre-carré mise en évidence. Il en est fait de même pour le décimètre-carré et de sa relation avec le centimètre-carré. Les carrés d'aire 1 dm^2 réalisés par les élèves sont découpés et assemblés pour obtenir le mètre-carré.

L'objectif est à travers des images mentales de fixer l'idée qu'il faut :

- multiplier l'unité d'aire par 100 pour obtenir une unité d'aire du rang immédiatement supérieur.
- diviser l'unité d'aire par 100 pour obtenir une unité d'aire du rang immédiatement inférieur.

2.4- Justification de la formule donnant l'aire du rectangle

Le travail s'effectue sur papier millimétré. Il est demandé aux élèves de dessiner un rectangle de longueur 7 cm et de largeur 4 cm et d'en exprimer l'aire en cm^2, puis de recommencer avec un rectangle de longueur 6,5 cm et de largeur 3,5 cm et enfin avec un rectangle de longueur 6,2 cm et de largeur 3,7 cm .

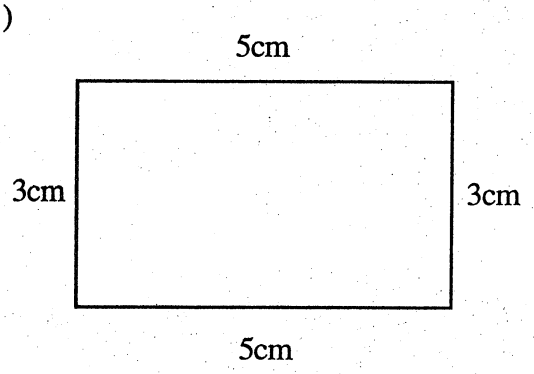
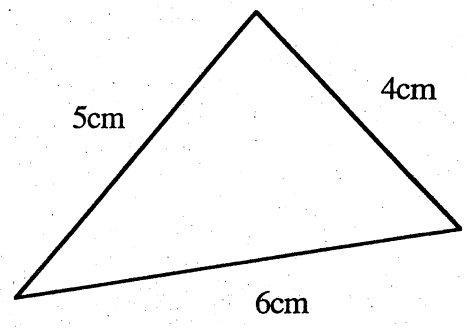
La calculatrice et les opérations à la main sont interdites pour contraindre les élèves à passer par le pavage. Devant les difficultés rencontrées pour dénombrer le nombre de mm^2 contenus dans le troisième rectangle, la formule prend tout son sens.

Cette activité peut tout aussi bien être abordée après le travail sur le cm^2 et le demi-cm^2 que nous présentons maintenant.

3) AUTOUR DU cm^2

3.1 Pourquoi cette activité ?

En Octobre 1991, nous avons fait passé à nos élèves de sixième, (4 classes) avant tout enseignement sur ce thème, le test suivant :

1)  Quelle est l'aire de ce rectangle ?	2)  Quel est le périmètre de ce triangle ?
3) Complète : 2 m^2 = cm^2 130 mm^2 = cm^2 3 km^2 = hm^2	4) Voici une surface de 1 cm^2  Dessine une surface de 0,5 cm^2

Ce test nous a permis de mettre en évidence trois points importants :

1-Même quand l'élève utilise la formule correcte pour l'aire du rectangle, l'unité utilisée est souvent le cm.

2-Les changements d'unités d'aire (m^2-cm^2 ..) se font massivement en utilisant les règles de changement d'unité de longueur.

3-Si l'élève doit tracer une figure d'aire 1/2 cm^2, il dessine un carré dont le côté mesure 1/2 cm.

La dénomination "centimètre-carré" attache l'unité à une forme : le carré. Celle -ci est associée à une longueur : le centimètre.

Donc, de la même manière, le 1/2 cm^2 est attaché à la même forme : le carré et la longueur de 1/2 cm.

3.2 Description de l'activité.

1- Apprentissages visés :

* L'unité d'aire n'est pas attachée à la forme "carré", bien que la définition renvoie à la forme "carré" (la forme carré étant cependant bien la forme privilégiée pour paver).

* Le 1/2 cm^2 est la moitié de l'unité d'aire et non un carré de côté 1/2 cm.

* Donner du sens au cm^2 à travers le 1/2 cm^2 en dissociant l'aire de la forme.
Rmq : Ce sera accessoirement le premier contact avec la propriété liant la longueur et l'aire (si la longueur est multipliée par k, l'aire est multilplieé par k^2).

2- Matériel :

Feuille quadrillée 1 cmx1 cm .
Nous n'avons pas choisi le quadrillage 5 mmx 5 mm qui induit certains découpages et en particulier le 1/4 cm^2.

3- Nos choix didactiques :

* Obtenir une grande variété de formes avec le recours permanent à l'unité cm^2 en découpant et recollant les surfaces.
* Travailler sans utiliser les formules.
* Permettre aux élèves l'explicitation de leur conception de la forme de l'unité d'aire.

4- A qui s'adresse l'activité ?

Elle s'adresse à tous les élèves, car on fait appel à une conception érronée très répandue.

3.3 Déroulement.

A) Première phase : Travail sur le cm^2.

*Premier temps :

Chaque élève dispose d'une feuille quadrillée 1 cmx1 cm.

Consigne :

Tracer sur la feuille plusieurs figures de formes différentes qui ont toutes pour aire 1 cm^2.

Les élèves travaillent individuellement en utilisant s'ils le souhaitent leur matériel de géométrie.
Si un elève s'arrète après avoir construit un carré, le professeur l'invite à produire d'autres figures de formes différentes, comme l'indique la consigne.

Durée: 10 à 15 minutes.

*Deuxième temps :

En utilisant un rétroprojecteur et un transparent quadrillé 1 cmx1 cm , on procède au recensement des différentes formes obtenues : les élèves se succèdent pour dessiner leurs propres productions.
Chaque figure est discutée quand elle est proposée par son auteur. La validation est obtenue en pavant le carré unité par découpage et recollement de la figure proposée.

Durée: 30 min.

*Troisième temps :

Les élèves sont invités à complèter leur production afin d'obtenir un large éventail de figures d'aire 1 cm^2(au moins 10).Cette phase peut aussi être réalisée à la maison.

Durée : 5 min.

B) Deuxième phase : Travail sur le 1/2 cm^2.

Chaque élève dispose d'une feuille quadrillée 1 cm x 1 cm.

*Premier temps :

Consigne

Trace sur ta feuille une figure dont l'aire est 1/2 cm^2.

A ce stade de la consigne, il nous semble que l'écriture fractionnaire ne doit pas gènée la compréhension, la fraction 1/2 étant bien associée à la notion de moitié.

Durée: 5 min

*Deuxième temps :

Les élèves se regroupent par 4. Ils se mettent d'accord sur une figure qu'ils proposeront à la classe.

Durée: 5 min

*Troisième temps :

Un porte parole de chaque groupe vient dessiner sur le rétroprojecteur la production du groupe. Il est invité à réaliser son dessin même si celui -ci à déja été réalisé par un autre groupe, ceci pour avoir une représentation des productions de la classe.

A ce stade, l'enseignant peut rencontrer deux situations :

1er cas : Parmi les figures proposées se trouvent une réponse correcte. Le professeur demande alors à la classe de faire un choix en argumentant (ils feront référence au pavage du carré unité à l'aide de la figure produite : il faut 2 figures identiques pour paver le cm^2).

2ème cas : Toutes les figures sont fausses.

Le professeur dessine alors sur le transparent la figure suivante : 

et demande à chaque groupe de trouver son aire.

Les réponses des groupes sont recensées : parmi celles-ci, devrait figurer le cm^2.

Le professeur invite alors ses élèves à comparer cette figure à leurs productions ; le débat qui s'instaure devrait permettre la distinction entre le 1/4 cm^2 et le 1/2 cm^2. Il sera alors temps de revenir aux figures trouvées précédemment.

La conclusion de la classe sera que la surface de 1/2 cm^2 est une surface dont l'aire est la moitié de celle d'un cm^2 et non un carré de 1/2 cm^2.

Durée : 10 min.

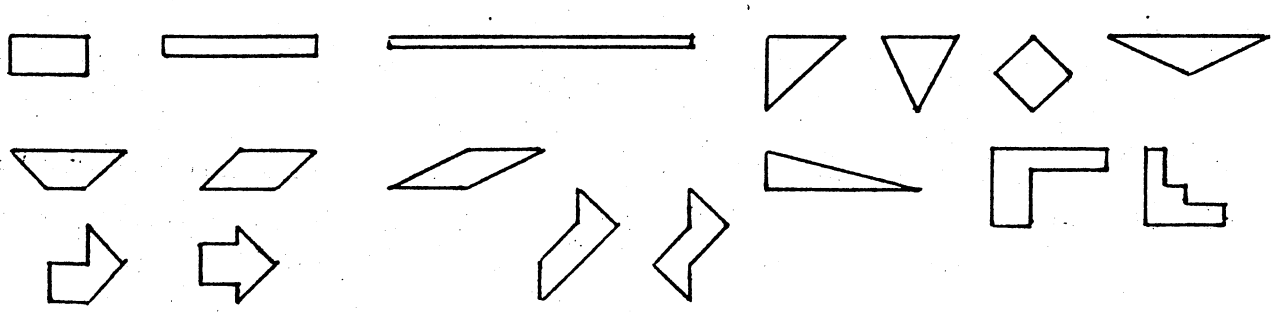
* Quatrième temps :

Consigne :

Trace sur ta feuille plusieurs figures ayant une aire de 1/2 cm^2.

Il s'agit à ce moment de permettre aux élèves de réaliser une petite collection de figures afin de bien intégrer la notion : la forme n'est pas obligatoirement le carré et les longueurs ne sont pas obligatoirement divisée par 2.

Quelques exemples de figures obtenues :

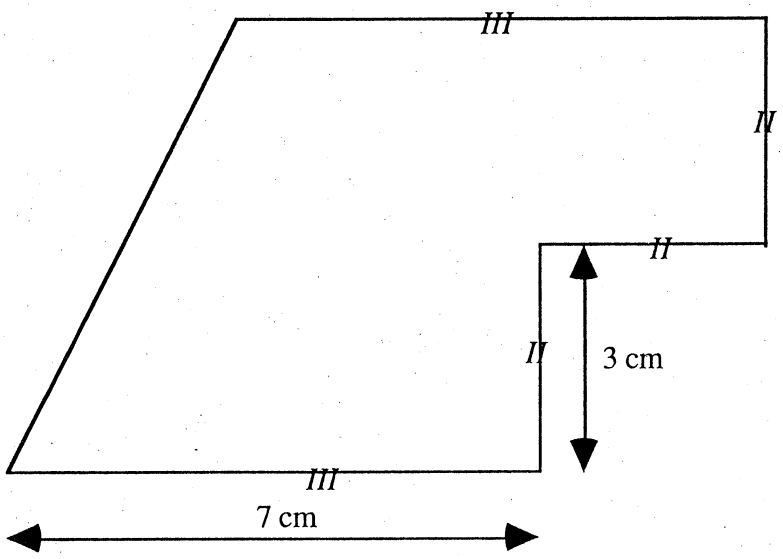


Durée : 5 .10 min

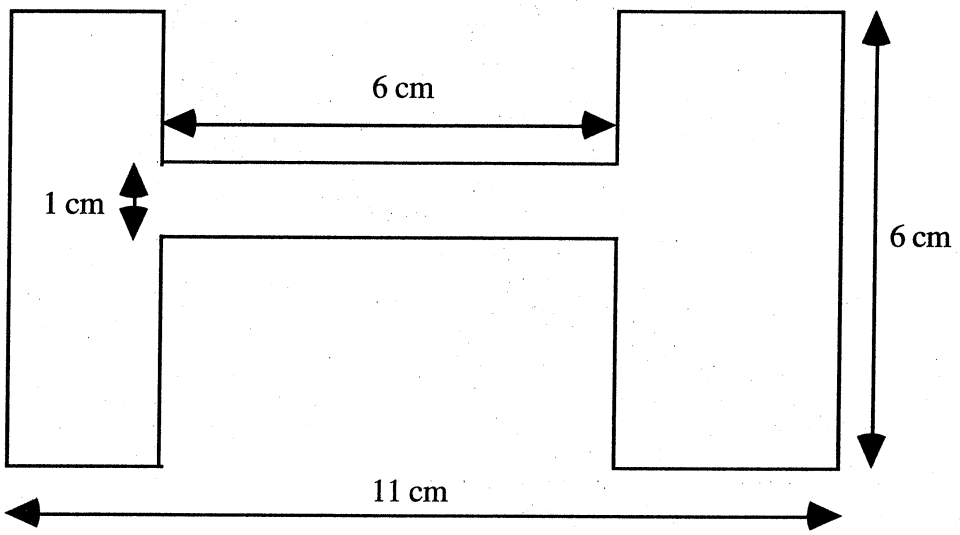
4) ET ENFIN.

L'utilisation des formules d'aire et périmètre figurant au programme de la classe de 6ème sera l'occasion de retravailler ces notions en visant davantage le sens que l'aspect calculatoire et en mettant l'accent sur leurs différences, notamment l'additivité des aires mais pas des périmètres. Voici quelques propositions d'exercices.

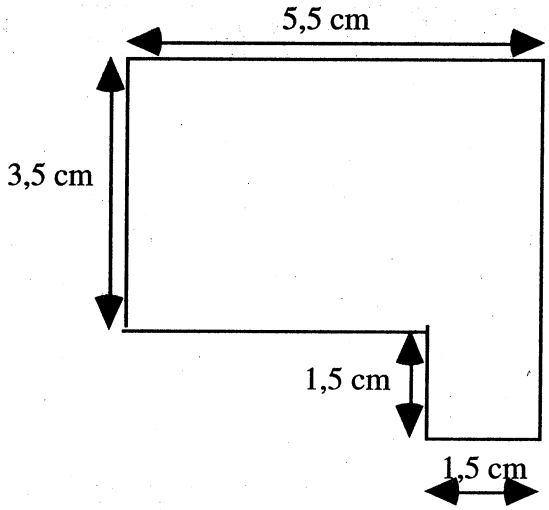
1) Reproduire cette figure en vraie grandeur et calculer son aire.
   (extrait de Mathématiques 6ème, Ed. Hachette)

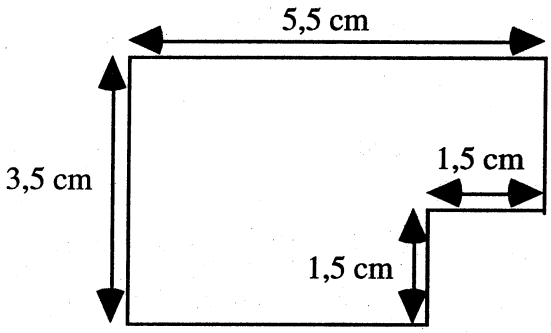


2) Calculer l'aire et le périmètre de cette surface.
(d'après Mathématiques 6ème, Ed. Hachette)

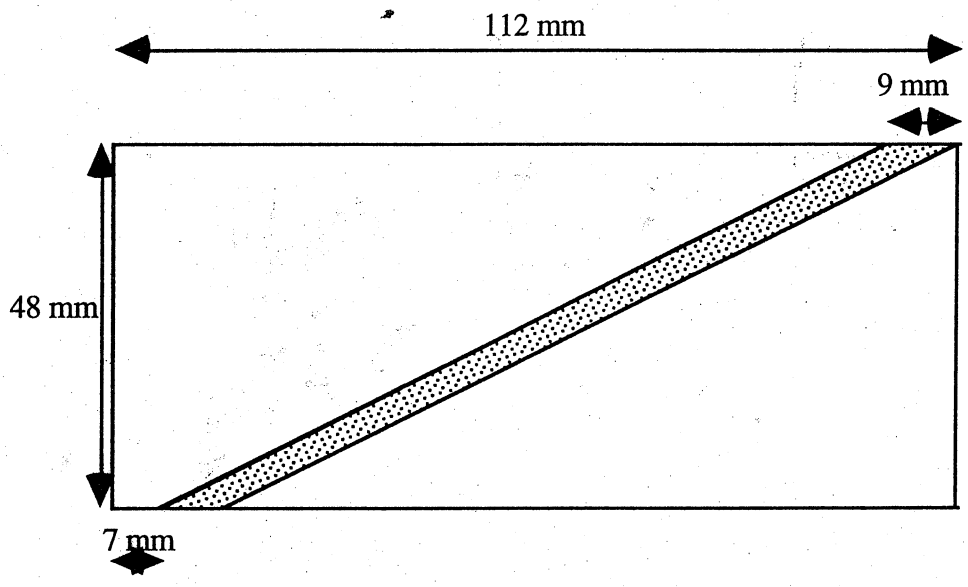


3) Calculer les aires et périmètres de chacune de ces figures.





4) Calculer l'aire de la surface grisée.
(d'après Mathématiques 6ème, Ed. Hachette)

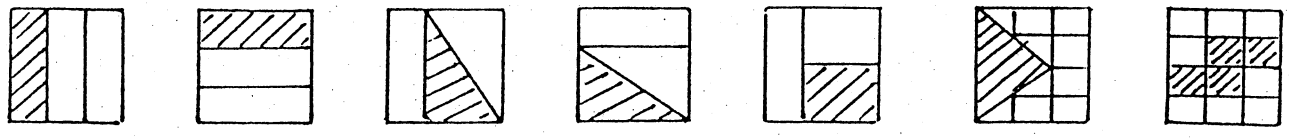


V - DES IDEES D'ACTIVITES DANS LES AUTRES NIVEAUX

1) EN 5ème

1.1 VRAI OU FAUX ?

(Extrait de Mathématiques 6 ème -Ed Hachette)

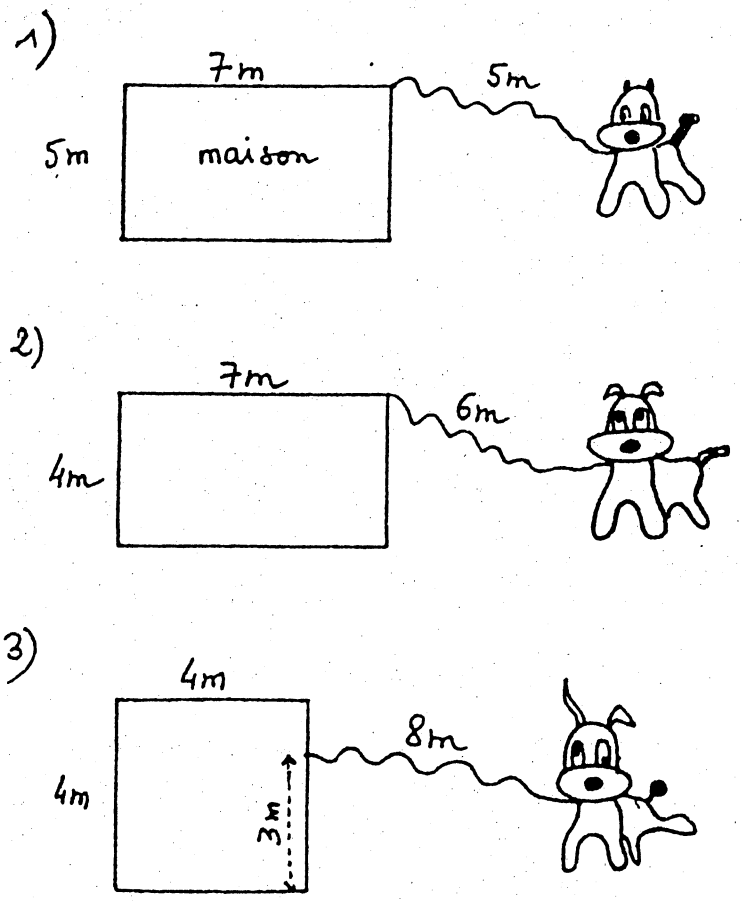


"L'aire de toutes les surfaces est 1/3.Vrai ou faux ?"

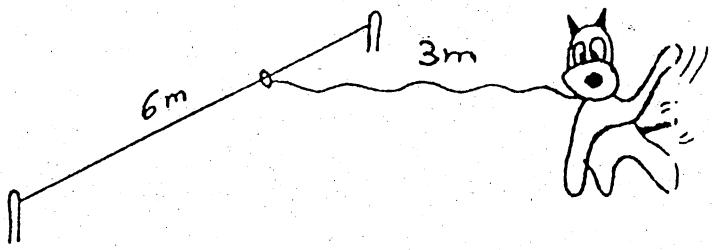
Cet exercice permet de revenir sur la fait que des figures de forme différentes peuvent avoir la même aire.

1.2 <u>LE CHIEN</u> . (d' après l'IREM de Grenoble)

Un chien est attaché à une laisse ! Représente à l'échelle 1/100 la zone dans laquelle il peut se promener en tenant compte des croquis suivants :



4) La laisse peut glisser sur un câble tendu.

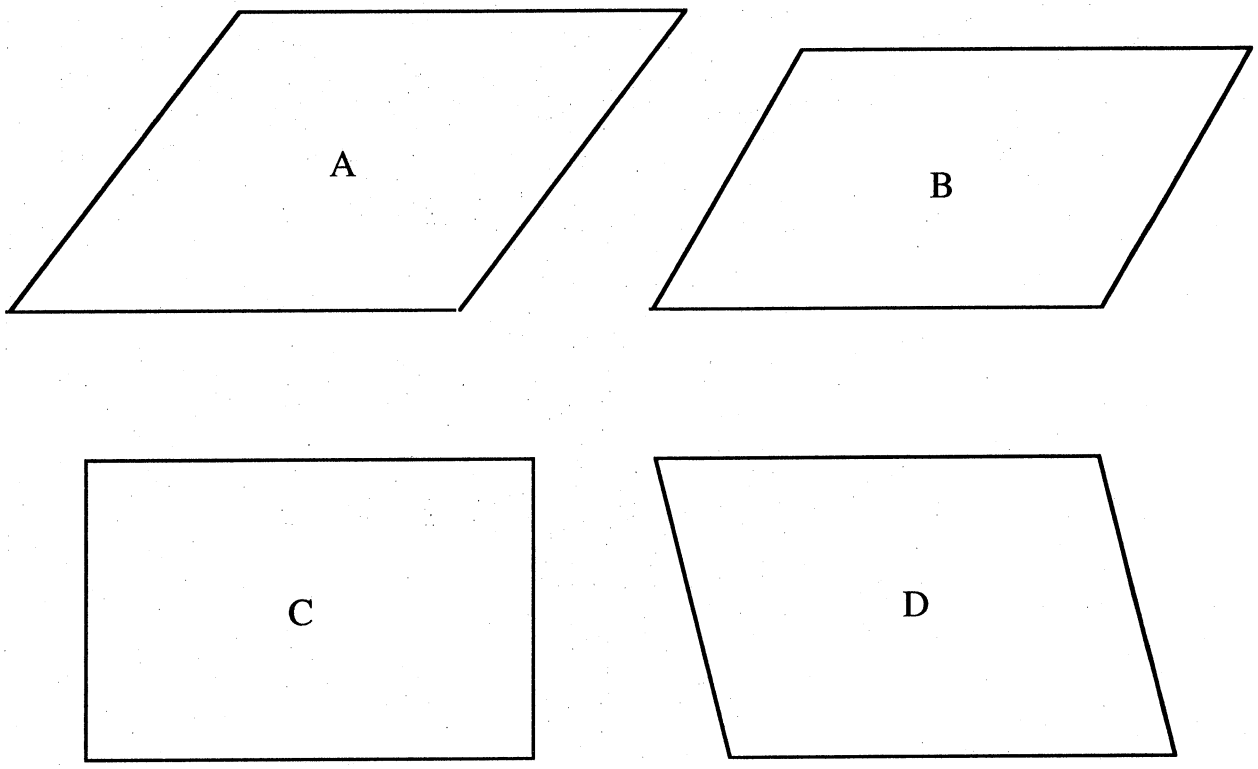


Cet exercice permet de retravailler la notion de surface. Suivant le niveau de la classe, si les deux premières questions nous paraissent devoir être traitées avec tous les élèves, les deux suivantes en seront traitées que par certains.

1.3 PARALLELOGRAMME ET RECTANGLE.

Cette activité permet de montrer que la mesure des côtés d'un parallélogramme n'est pas suffisante pour calculer son aire.

Matériel :
Chaque élève dispose d'une feuille sur laquelle se trouvent les figures A ; B ; C et D.



Le professeur réserve des feuilles supplémentaires qui seront distribuées au moment du découpage.

Consigne :
"Compare les aires des figures A, B, C et D."

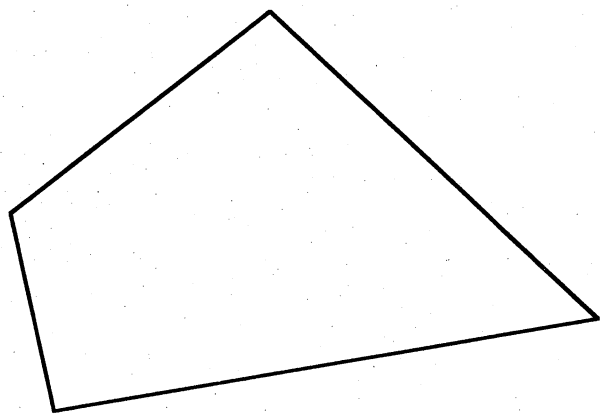
De très nombreux élèves calculent l'aire des différentes figures en appliquant la formule "évidente" : aire = côté x côté.
Le classement obtenu est donc : A > C > B (= C)

Le professeur demande de valider la réponse. Le découpage - recollement est donc utilisé pour comparer les aires.
On obtient alors : A = C = D > B

Ce résultat permet de mettre en place le rôle de la hauteur du parallélogramme.

1.4 AIRE D'UN QUADRILATERE

Consigne : " Prendre les mesures nécessaires sur la figure pour calculer l'aire du quadrilatère."



Cet exercice permet aux élèves de faire leur propre décomposition de la figure pour faire apparaitre la figure de base qu'est le triangle rectangle.

La confrontation qui suit portera sur les points suivants :
- la connaissance des côtés ne renseigne pas sur l'aire.
- la comparaison des résultats doit tenir compte de l'imprécision des mesures.

2) EN 4ème

2.1 AIRE ET ECRITURES LITTERALES

(d'après Pythagore 4ème, Ed. Hatier)

Buts: - Renforcer la distinction entre Aire et Périmètre
- Donner du sens à quelques expressions littérales

Matériel : Quatre fiches avec sur chacune un segment de longueur différente
Une fiche réponse, par groupe de 4 élèves

Déroulement : Les élèves sont groupés par 4
Chaque élève du groupe reçoit une feuille sur laquelle est dessiné un segment de longueur a. Au sein d'un même groupe les longueurs des quatre segments seront différentes.

1ère heure:

Phase de travail individuel : 20 min

Consigne : Sur la fiche qui vous a été remise, vous devez dessiner
une figure F1 qui a pour aire a^2
une figure F2 qui a pour aire 2a
une figure F3 qui a pour aire $2a^2$
une figure F4 qui a pour aire a
une figure F5 qui a pour aire $\frac{a2}{2}$

Les élèves peuvent utiliser tout le matériel qu'ils désirent, y compris la calculatrice

Phase de travail en groupe : 30 min

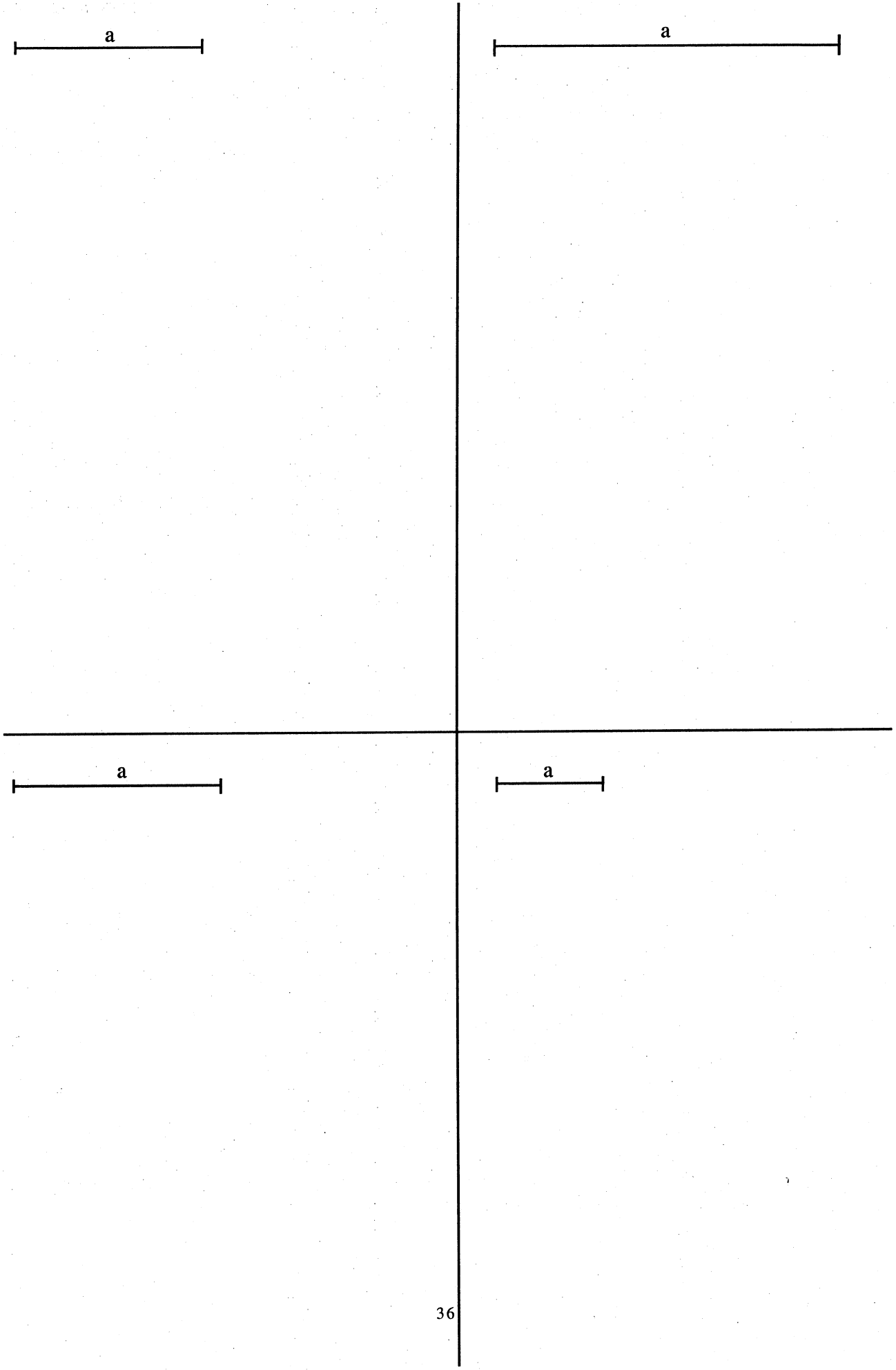
Une fiche réponse est remise à chaque goupe
Au sein du groupe les élèves doivent se mettre d'accord sur les solutions proposées par chacun d'eux. Pour chaque question la ou les figures retenues par le groupe sont dessinées sur la fiche réponse.
En fin d'heure les fiches individuelles et les fiches de groupe sont ramassées.

2ème heure:

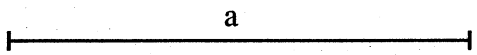
Mise en commun

La fiche réponse est rendue à chaque groupe pour que les élèves se remettent en mémoire l'activité et leurs propositions de réponse.
Pour chaque question, toutes les propositions sont inventoriées et soumises ensuite à discussion.

- Pour 2a, on peut s'attendre à avoir un segment de longueur 2a, un rectangle de longueur a et de largeur 2, et d'autres...
- Pour $2a^2$, une erreur attendue est un carré de côté 2a
- Pour $\frac{a^2}{2}$, on attend un carré de côté $\frac{a}{2}$


a
a
a
a

Fiche réponse du groupe



2.2 DES RECTANGLES AYANT UNE AIRE ET UN PERIMETRE DONNÉS (d'après l'IREM de Paris VII, suivi scientifique 3ème)

Buts : - Effectuer le lien entre tableau de valeurs, formule et graphique
- Utiliser un graphique pour résoudre un problème

Cette activité, qui a pour support l'aire et le périmètre du rectangle, est l'occasion de mettre en évidence qu'à aire constante les dimensions d'un rectangle ne varient pas de la même manière qu'à périmètre constant.

Matériel : - Papier millimétré
- Pour chaque élève une courbe représentant les variations des dimensions d'un rectangle à périmètre constant : 48 cm et une courbe représentant les variations des dimensions d'un rectangle à aire constante : 36 cm^2.

Déroulement :

1- Des rectangles ont le même périmètre 48 cm. Les rectangles se nomment ABCD. On pose AB = x et CD = y.

Donner quelques valeurs possibles pour le couple (x ; y).

Les valeurs des couples (x ; y), après vérification, sont recensées au tableau.

Ecrire une formule liant x et y.

Après un temps de recherche individuelle, les élèves continuent à travailler à deux.

Dans un repère, en portant la dimension x en abscisse et la dimension y en ordonnée, placer plusieurs points dont les coordonnées sont obtenues à partir de la formule.

Pour avoir un nombre suffisant de points, de manière à voir apparaître l'allure de la courbe, les élèves pourront compléter leur graphique en plaçant les points dont les coordonnées sont les couples (x ; y) précédemment recensés.

2- Des rectangles ont la même aire 36 cm^2.

Donner quelques valeurs possibles pour le couple (x ; y).

Ecrire une formule liant x et y.

Dans un repère, en portant la dimension x en abscisse et la dimension y en ordonnée, placer plusieurs points dont les coordonnées sont obtenues à partir de la formule.

Le déroulement est analogue à celui de la première question.

Une synthèse est alors faite qui permet de voir comment se traduit chacune des deux contraintes sur les dimensions du rectangle :

- à périmètre constant longueur et largeur restent inférieures à 24 cm et quand une dimension augmente, l'autre diminue d'autant.

- à aire constante il n'existe pas de majoration des dimensions et quand une une dimension augmente, l'autre diminue mais pas de la même manière et pas de façon régulière. Pour une même augmentation de x, la diminution de y est différente suivant la valeur initiale de x.

Ceci se traduit par deux courbes d'allure totalement différentes.

Le professeur distribue à chaque élève une courbe représentant les variations des dimensions d'un rectangle à périmètre constant (48 cm) et une courbe représentant les variations des dimensions d'un rectangle à aire constante (36 cm^2).

3 - Existe t-il un ou plusieurs rectangles ayant pour périmère 48 cm et pour aire 36 cm^2 ?

La résolution algébrique n'est pas accessible à un élève de 4ème, mais une résolution graphique est à sa portée. Il suffit pour celà de reproduire, sur le graphique représentant les variations des dimensions du rectangle à aire constante, la droite représentant les variations des dimensions à périmètre constant.

3) EN 3ème

3.1 REDUCTION DE MOITIE

(D'après l'IREM de Bordeaux, suivi scientifique 3ème)

Sur certains photocopieurs, il faut sélectionner la touche 70% pour obtenir une réduction de moitié. Explique la raison de ce choix.

• Après un temps de recherche individuelle, les élèves travaillent à deux.

Pour certains élèves, le mot "moitié" évoque l'idée du pliage d'une feuille rectangulaire suivant une de ses médianes. Si l'aire est bien divisée par deux, ce pliage n'éclaire pas le choix du pourcentage 70%: une des dimensions est conservée, l'autre est divisée par deux.

D'autres élèves remettent en cause l'énoncé et affirment qu'il suffit de diviser chacune des dimensions par deux (c'est-à-dire sélectionner la touche 50 %) pour obtenir une réduction de moitié. C'est lorsqu'ils vérifient leur affirmation, soit par le calcul, soit par le dessin, qu'ils prennent conscience de son inexactitude et du fait que la sélection de la touche 50 % conduit à une réduction à l'échelle 1/4.

• Un point peut être fait alors avec la classe sur l'état des recherches entreprises :

- celles qui ne débouchent pas
- celles, qui si elles ne fournissent pas l'explication attendue, ouvrent des pistes de travail.

C'est le cas de la seconde que nous avons évoquée qui permet d'effectuer le lien entre réduction de chacune des dimensions de la feuille et réduction de l'aire et qui ouvre la voie à la recherche d'un cœfficient k tel que $k^2 = \frac{1}{2}$.

3.2 CONSTRUCTION D'UN CARRE D'AIRE 2 dm^2

Cette activité débouche sur l'existence d'un nombre positif dont le carré est 2.

Les élèves sont groupés par quatre. Il est d'abord demandé à chacun de construire un carré d'aire 1 dm^2, puis il est demandé à chaque groupe de réaliser un carré d'aire 2 dm^2.

On voit apparaître des rectangles d'aire 2 dm^2, des carrés d'aire 4 dm^2. Ce n'est qu'après ces tentatives infructueuses que le carré est obtenu à partir du découpage de deux carrés d'aire 1 dm^2.